Aula 07 – num_oc_insere - gabarito

terça-feira, 8 de fevereiro de 2022 21:19

Prove o seguinte lema que faz parte da formalização da correção do algoritmo de ordenação por inserção:

```
Lemma num_oc_insere: forall l l' x a, perm' l l' -> (if x =? a then S (num_oc x l) else num_oc x l) =
  num_oc x (insere a l').
Proof.
Admitted.
```

Observações: Não coloque código coq como resposta. A sua prova deve ser feita em linguagem natural, ou seja, em Português.

$$\text{perm } l\ l' \to \begin{cases} S(\text{num\_oc } x\ l) = \text{num\_oc } x\ (\text{insere } a\ l'), & \text{se } x = a; \\ \text{num\_oc } x\ l = \text{num\_oc } x\ (\text{insere } a\ l'), & \text{se } x \neq a. \end{cases}$$

Vamos dividir a prova em 2 casos:

① $x = a$: Neste caso, queremos provar que:

$\boxed{\text{se perm } l\ l' \text{ então } S(\text{num\_oc } a\ l) = \text{num\_oc } a\ (\text{insere } a\ l')}$. (*)

Como (perm $l\ l'$) significa que $\boxed{\text{num\_oc } x\ l = \text{num\_oc } x\ l',\ \forall x}$ (**)

e portanto podemos substituir (**) em (*):

$\boxed{S(\text{num\_oc } a\ l') = \text{num\_oc } a\ (\text{insere } a\ l')}$ (***)

Vamos provar (***) por indução na estrutura de l':

(1.1) $l' = nil$:

$$\begin{aligned} S(\text{num\_oc } a\ nil) &= \text{num\_oc } a\ (\underbrace{\text{insere } a\ nil}) \\ &= \text{num\_oc } a\ (a::nil) \\ &= S(\text{num\_oc } a\ nil). \end{aligned}$$

(1.2) $l' = h::tl'$:

Temos por hipótese de indução que

$\boxed{S(\text{num\_oc } a\ tl') = \text{num\_oc } a\ (\text{insere } a\ tl')}$ (h.i.)

Consideraremos 2 subcasos:

(1.2.1) $a \leq h$: Neste caso, temos

$$\begin{aligned} S(\text{num\_oc } a\ (h::tl')) &= \text{num\_oc } a\ (\underbrace{\text{insere } a\ (h::tl')}) \\ &= \text{num\_oc } a\ (a::h::tl') \\ &= S(\text{num\_oc } a\ (h::tl')). \end{aligned}$$

(1.2.2) $a > h$: Neste caso, temos:

$$\begin{aligned} S(\text{num\_oc } a\ (h::tl')) &= \text{num\_oc } a\ (\underbrace{\text{insere } a\ (h::tl')}) \\ &= \text{num\_oc } a\ (h::(\text{insere } a\ tl')) \\ &= \text{num\_oc } a\ (\text{insere } a\ tl'). \\ &\overset{(h.i.)}{=} S(\text{num\_oc } a\ tl'). \end{aligned}$$

② $x \neq a$: Neste caso, queremos provar que:

$\boxed{\text{se perm } l\ l' \text{ então } \text{num\_oc } x\ l = \text{num\_oc } x\ (\text{insere } a\ l')}$. (****)

Aplicando a hipótese (**), temos que

$\boxed{\text{num\_oc } x\ l' = \text{num\_oc } x\ (\text{insere } a\ l')}$

Provaremos esta última igualdade por indução na estrutura de l':

(2.1) $l' = nil$:

$$\begin{aligned} \text{num\_oc } x\ nil &= \text{num\_oc } x\ (\underbrace{\text{insere } a\ nil}) \\ &= \text{num\_oc } x\ (a::nil) \\ &= \text{num\_oc } x\ nil. \end{aligned}$$

(2.2) $l' = h::tl'$:

Temos por hipótese de indução que

$\boxed{\text{num\_oc } x\ tl' = \text{num\_oc } x\ (\text{insere } a\ tl')}$ (h.i.)

Consideramos 2 subcasos:

(2.2.1) $a \leq h$:

$$\begin{aligned} \text{num\_oc } x\ (h::tl') &= \text{num\_oc } x\ (\underbrace{\text{insere } a\ (h::tl')}) \\ &= \text{num\_oc } x\ (a::h::tl') \\ &= \text{num\_oc } x\ (h::tl'). \end{aligned}$$

(2.2.2) $a > h$:

$$\begin{aligned} \text{num\_oc } x\ (h::tl') &= \text{num\_oc } x\ (\underbrace{\text{insere } a\ (h::tl')}) \\ & \text{num\_oc } x\ (h::(\text{insere } a\ tl')) \end{aligned}$$

Agora podemos concluir com a (h.i.) tanto no caso em que $x = h$ quanto no caso em que $x \neq h$.

$\boxtimes$