5.4 O Teorema Mestre - versão 2

Apresentaremos agora uma versão um pouco mais geral do teorema mestre. Consideraremos, como anteriormente, uma recorrência da forma:

$$T(n) = a.T(n/b) + f(n)$$

onde $a \geq 1$ e $b > 1$ são constantes, e $f(n)$ é uma função assintoticamente positiva.

Teorema 5.4.1 (Teorema Mestre - versão 2)**.** *Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, $f(n)$ uma função assintoticamente positiva, e $T(n)$ definida nos inteiros não-negativos pela recorrência:*

$$T(n) = a.T(n/b) + f(n)$$

onde n/b deve ser interpretado como $\lfloor n/b \rfloor$ ou $\lceil n/b \rceil$. Então $T(n)$ tem as seguintes cotas assintóticas:

1. *Se $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.*
2. *Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}. \lg n)$.*
3. *Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, e se $a.f(n/b) \leq c.f(n)$ para alguma constante $c < 1$, então para todo n suficientemente grande, temos que $T(n) = \Theta(f(n))$.*

A prova será dividida em três lemas, onde inicialmente consideraremos que n é potência de b.

Lema 5.4.2. *Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, $f(n)$ uma função não-negativa definida para potências de b. Defina $T(n)$ para potências de b pela recorrência:*

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & se\ n = 1; \\ a.T(n/b) + f(n), & se\ n = b^i \end{cases}$$

onde i é um inteiro positivo. Então

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j.f(n/b^j).$$

Demonstração. Analise a árvore de recorrência da equação dada. $\square$

Em termos da árvore de recorrência, os três casos do teorema mestre correspondem aos casos onde o custo total da árvore é:

1. dominado pelo custo das folhas;
2. uniformemente distribuído ao longo da árvore;
3. dominado pelo custo da raiz.

Lema 5.4.3. *Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, $f(n)$ uma função não-negativa definida para potências de b. A função $g(n)$ definida para potências de b por:*

$$g(n) = \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j . f(n/b^j).$$

tem as seguintes cotas assintóticas para potências de b:

1. *Se $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, então $g(n) = O(n^{\log_b a})$.*
2. *Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $g(n) = \Theta(n^{\log_b a} . \lg n)$.*
3. *Se $a.f(n/b) \leq c.f(n)$ para alguma constante $c < 1$ e para todo n suficientemente grande, então $g(n) = \Theta(f(n))$.*

Demonstração. Exercício. □

Lema 5.4.4. *Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, $f(n)$ uma função não-negativa definida para potências de b. Defina $T(n)$ para potências de b pela recorrência:*

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & \text{se } n = 1; \\ a.T(n/b) + f(n), & \text{se } n = b^i \end{cases}$$

onde i é um inteiro positivo. Então $T(n)$ tem as seguintes cotas assintóticas:

1. *Se $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.*
2. *Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} . \lg n)$.*
3. *Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, e se $a.f(n/b) \leq c.f(n)$ para alguma constante $c < 1$, então para todo n suficientemente grande, temos que $T(n) = \Theta(f(n))$.*

Demonstração. Exercício. □

Por fim, para completar a prova do Teorema 5.4.1 é preciso estender a análise para o caso geral, e não apenas para quando n é potência de b. Esta extensão, assim como as provas dos lemas acima podem ser encontradas na Seção 4.6 de [2].