Considere a sentença $\phi = \forall_x \exists_y \exists_z (p(x,y) \wedge p(z,y) \wedge (p(x,z) \to p(z,x)))$. Quais das seguintes interpretações dadas a seguir satisfazem ϕ?

(a) A interpretação $\mathcal{M}$ possui como domínio o conjunto dos números naturais, e $p^{\mathcal{M}} = \{(m,n) \mid m < n\}$;

(b) A interpretação $\mathcal{M}'$ possui como domínio o conjunto dos números naturais, e $p^{\mathcal{M}'} = \{(m, 2m) \mid m$ é um número natural$\}$;

(c) A interpretação $\mathcal{M}''$ possui como domínio o conjunto dos números naturais com $p^{\mathcal{M}''} = \{(m,n) \mid m < n+1\}$.

(a) Para ϕ seja verdadeira na interpretação $\mathcal{M}$, precisamos que cada componente da conjunção que forma ϕ seja verdadeira. A primeira componente é interpretada como $\forall x \exists y (x<y)$: ou seja, que para qualquer natural x existe um natural y tal que $x<y$. Isto é verdade pois basta tomarmos $\boxed{y = x+1.}$ A segunda componente requer que encontremos y e z tais que $z < y = x+1$. Basta tomar $\boxed{z = x.}$ Por fim, a terceira componente diz que $(x < z(=x)) \to ((z=x) < x)$. Mas o antecedente desta implicação é falso, e portanto a implicação é verdadeira.
Conclusão: Para qualquer x, se tomarmos $y = x+1$ e $z = x$ temos que ϕ é verdadeira, e portanto $\mathcal{M} \models \phi$.

(b) Como no item anterior, podemos, para qualquer natural x tomar $\boxed{y = 2x}$ e $\boxed{z = x.}$ Neste caso, $\mathcal{M}' \models \phi$.

(c) Podemos tomar $\boxed{y = x = z}$, e neste caso também temos que $\mathcal{M}'' \models \phi$.

$\boxtimes$