

Atividade 05 - gabarito

Wednesday, March 30, 2022

8:42 PM

Considere as seguintes sentenças:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \forall x p(x, x) \\ \phi_2 &= \forall x \forall y (p(x, y) \rightarrow p(y, x)) \\ \phi_3 &= \forall x \forall y \forall z (p(x, y) \wedge p(y, z) \rightarrow p(x, z))\end{aligned}$$

que expressam a reflexividade, simetria e transitividade do predicado p . Mostre que nenhuma destas sentenças é consequência lógica das outras duas escolhendo, para cada par de sentenças uma interpretação que satisfaça estas duas sentenças, mas não satisfaça a terceira. Essencialmente você deve encontrar três relações binárias onde cada uma satisfaz apenas duas destas propriedades.

1. Considere o domínio $D_1 = \{a, b, c\}$ da interpretação I_1 tal que:

$$P^{I_1} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}.$$

Note que I_1 satisfaz ϕ_1 e ϕ_2 , mas não satisfaz ϕ_3 . De fato, a reflexividade, i.e. ϕ_1 é evidente pois cada um dos elementos de D_1 está relacionado com ele mesmo, ou seja, (a, a) , (b, b) e (c, c) são elementos de P^{I_1} .

A simetria também pode ser facilmente verificada pois (a, b) , (b, a) , (a, c) e (c, a) são elementos de P^{I_1} .

No entanto a transitividade, i.e. ϕ_3 não é verdadeira nesta interpretação. De fato, (a, b) e (b, c) são elementos de P^{I_1} , mas $(a, c) \notin P^{I_1}$.

2. Considere a interpretação I_2 a seguir com $D_2 = \{a, b, c\}$.

$$P^{I_2} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b)\}$$

Temos $I_2 \models \phi_1$, $I_2 \models \phi_3$ mas $I_2 \not\models \phi_2$ pois $(a, b) \in P^{I_2}$ mas $(b, a) \notin P^{I_2}$.

3. Considere a interpretação I_3 a seguir com domínio $D_3 = \{a, b, c\}$

$$P^{I_3} = \{(a, b), (b, a), (a, a), (b, b)\}$$

Temos

$I_3 \models \phi_2$, $I_3 \models \phi_3$ mas $I_3 \not\models \phi_1$.

De fato, $(c, c) \notin P^{I_3}$.

□