Atividade 06 - gabarito

quarta-feira, 6 de abril de 2022 21:49

Determine se os sequentes a seguir são válidos ou não, e justifique sua resposta:

(a) $\vdash (\forall_x \exists_y p(x,y)) \to (\exists_y \forall_x p(x,y))$

(b) $\vdash (\exists_y \forall_x p(x,y)) \to (\forall_x \exists_y p(x,y))$

(a) Considere a interpretação I com domínio $\mathbb{N}$ (conjunto dos números naturais) e tal que $p^I = \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid x < y\}$.

Temos que I é um modelo da fórmula $\forall_x \exists_y\, p(x,y)$, i.e. $\forall_x \exists_y\, x<y$ pois para qualquer natural x existe um natural y maior do que x. De fato, tome $y = x+1$.

No entanto, I não é modelo da fórmula $\exists_y \forall_x\, p(x,y)$, i.e. $\exists_y \forall_x\, x<y$ pois não existe um natural que seja maior do que todos os outros naturais. Assim, a interpretação I não é modelo da fórmula $\forall_x \exists_y\, p(x,y) \to \exists_y \forall_x\, p(x,y)$, ou seja, $\not\models \forall_x \exists_y\, p(x,y) \to \exists_y \forall_x\, p(x,y)$ e pelo teorema da correção concluímos que $\nvdash \forall_x \exists_y\, p(x,y) \to \exists_y \forall_x\, p(x,y)$.

(b) Esta fórmula é válida:

$$\dfrac{\exists_y \forall_x\, p(x,y) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall_x\, p(x,y_0)]^u}{p(x_0,y_0)}\,(\forall e)}{\exists_y\, p(x_0,y)}\,(\exists i)}{\forall_x \exists_y\, p(x,y)}\,(\forall i)}{\forall_x \exists_y\, p(x,y)}\,(\exists e)\, u$$