

Exercício 12:  $\boxed{\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\gamma}$

$$\begin{array}{c}
 (Ax) \frac{\frac{\varphi, \neg\varphi, \gamma \vdash \neg\varphi \quad \varphi, \neg\varphi, \gamma \vdash \varphi}{\varphi, \neg\varphi, \gamma \vdash \perp} (\neg e)}{\varphi, \neg\varphi, \gamma \vdash \perp} (\neg i) \\
 \text{regra 8} \Rightarrow \\
 \frac{\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\gamma}{\vdash \varphi} (\neg i) \quad \leftarrow \text{regra 7}
 \end{array}$$

Exercício 13:  $\varphi \vdash \neg\neg\varphi \Rightarrow \boxed{\frac{\vdash \varphi}{\vdash \neg\neg\varphi} (\neg\neg i)}$

$$\begin{array}{c}
 (Ax) \frac{\frac{\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi \quad \varphi, \neg\varphi \vdash \varphi}{\varphi, \neg\varphi \vdash \perp} (\neg e)}{\varphi, \neg\varphi \vdash \perp} (\neg i) \\
 (r.8) \Rightarrow \\
 (r.7) \Rightarrow \varphi \vdash \neg\neg\varphi
 \end{array}$$

Exercício 14:  $\boxed{\neg\neg\neg A \vdash \neg A}$

$$\begin{array}{c}
 (Ax) \frac{\frac{\neg\neg\neg A, A, \neg A \vdash \neg A \quad \neg\neg\neg A, A, \neg A \vdash A}{\neg\neg\neg A, A, \neg A \vdash \perp} (\neg e)}{\neg\neg\neg A, A, \neg A \vdash \perp} (\neg i) \\
 (Ax) \frac{\frac{\neg\neg\neg A, A \vdash \neg\neg\neg A \quad \neg\neg\neg A, A \vdash \neg A}{\neg\neg\neg A, A \vdash \perp} (\neg e)}{\neg\neg\neg A, A \vdash \perp} (\neg i) \\
 \frac{\neg\neg\neg A, A \vdash \perp}{\neg\neg\neg A \vdash \neg A} (\neg i)
 \end{array}$$

Exercício 15:  $\neg(A \vee B) \vdash (\neg A) \wedge (\neg B)$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\neg(A \vee B), B, \neg\neg(A \vee B) \vdash \neg\neg(A \vee B)} (Ax) \quad \frac{}{\neg(A \vee B), B, \neg\neg(A \vee B) \vdash \neg(A \vee B)} (Ax) \\
 \hline
 \frac{}{\neg(A \vee B), B, \neg\neg(A \vee B) \vdash \perp} (\neg e) \quad \frac{}{\neg(A \vee B), B \vdash B} (vi) \\
 \hline
 \frac{}{\neg(A \vee B), B \vdash \neg(A \vee B)} (\neg i) \quad \frac{}{\neg(A \vee B), B \vdash A \vee B} (\vee i) \\
 \hline
 \frac{}{\neg(A \vee B), B \vdash \neg\neg(A \vee B)} (\neg e) \quad \frac{}{\neg(A \vee B), B \vdash \perp} (\neg i) \\
 \hline
 \frac{}{\neg(A \vee B) \vdash \neg A} (*) \quad \frac{}{\neg(A \vee B) \vdash \neg B} (\neg i) \\
 \hline
 \frac{}{\neg(A \vee B) \vdash (\neg A) \wedge (\neg B)} (\wedge i)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\neg(A \vee B), A, \neg\neg(A \vee B) \vdash \neg\neg(A \vee B)} (Ax) \quad \frac{}{\neg(A \vee B), A, \neg\neg(A \vee B) \vdash \neg(A \vee B)} (Ax) \\
 \hline
 \frac{}{\neg(A \vee B), A, \neg\neg(A \vee B) \vdash \perp} (\neg e) \quad \frac{}{\neg(A \vee B), A \vdash A} (vi) \\
 \hline
 \frac{}{\neg(A \vee B), A \vdash \neg(A \vee B)} (\neg i) \quad \frac{}{\neg(A \vee B), A \vdash A \vee B} (\vee i) \\
 \hline
 \frac{}{\neg(A \vee B), A \vdash \neg\neg(A \vee B)} (\neg e) \quad \frac{}{\neg(A \vee B), A \vdash \perp} (\neg i) \\
 \hline
 \frac{}{\neg(A \vee B) \vdash \neg A} (\neg i)
 \end{array}$$

(\*)

$(\neg A) \wedge (\neg B) \vdash \neg(A \vee B)$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{(\neg A) \wedge (\neg B), A \vee B \vdash (\neg A) \wedge (\neg B)} (Ax) \quad \frac{}{(\neg A) \wedge (\neg B), A, \neg A \vdash \neg A} (Ax) \\
 \hline
 \frac{}{(\neg A) \wedge (\neg B), A \vee B \vdash \neg A} (\neg e) \quad \frac{}{(\neg A) \wedge (\neg B), A, \neg A \vdash \perp} (\neg e) \\
 \hline
 \frac{}{(\neg A) \wedge (\neg B), A \vee B \vdash \neg\neg A} (\neg i) \quad \frac{}{(\neg A) \wedge (\neg B), A \vdash \neg\neg A} (*) \\
 \hline
 \frac{}{(\neg A) \wedge (\neg B), A \vee B \vdash \neg\neg A} (\neg e) \quad \frac{}{(\neg A) \wedge (\neg B), A \vee B \vdash \neg\neg A} (\neg e) \\
 \hline
 \frac{}{(\neg A) \wedge (\neg B), A \vee B \vdash \perp} (\neg i)
 \end{array}$$

(\*)

$$\frac{}{(\neg A) \wedge (\neg B) \vdash \neg(A \vee B)}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{(Ax)} \\
 \hline
 (\neg A) \wedge (\neg B), B, \neg A \vdash (\neg A) \wedge (\neg B) \quad (\wedge e) \\
 \hline
 (\neg A) \wedge (\neg B), B, \neg A \vdash \neg B \quad (\neg A) \\
 (\neg A) \wedge (\neg B), B, \neg A \vdash B \quad (\neg e) \\
 \hline
 (\neg A) \wedge (\neg B), B, \neg A \vdash \perp \\
 \hline
 (\neg A) \wedge (\neg B), B \vdash \neg \neg A \quad (\neg i) \\
 \hline
 \circledast
 \end{array}$$