Exercício 40: $1^3+2^3+\dots+n^3 = (1+2+\dots+n)^2$.

Solução: Indução em n:

(BI) $n=1$: $1^3 = 1 = 1^2$. ✓

(PI) $n>1$: Temos por hipótese de indução que

$$\boxed{1^3+2^3+\dots+k^3 = (1+2+\dots+k)^2} \quad (h.i.)$$

e queremos provar que

$$1^3+2^3+\dots+k^3+(k+1)^3 = (1+2+\dots+k+(k+1))^2.$$

Logo,

$$1^3+2^3+\dots+k^3+(k+1)^3 \overset{(h.i.)}{=} (1+2+\dots+k)^2+(k+1)^3 \overset{Ex39}{=}$$

$$\left(\frac{k.(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3 = \frac{k^2.(k+1)^2}{4}+\frac{4(k+1)^3}{4} =$$

$$\frac{(k+1)^2.(k^2+4(k+1))}{4} = \frac{(k+1)^2.(k+2)^2}{4} =$$

$$\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2 \overset{Ex.39}{=} (1+2+\dots+k+(k+1))^2. \qquad \blacksquare$$