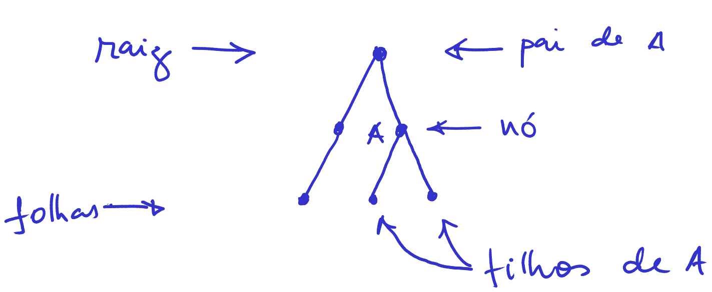
Exercício 55. *Prove que* $rev(l_1 \circ l_2) = (rev(l_2)) \circ (rev(l_1))$*, quaisquer que sejam as listas* l_1, l_2.

Solução: Indução na estrutura de l_1:

① $\boxed{l_1 = nil}$ (*): $rev(l_1 \circ l_2) \overset{(*)}{=} rev(nil \circ l_2) \overset{def.}{=} rev(l_2) \overset{(Ex.52)}{=}$ $rev(l_2) \circ nil \overset{def}{=} rev(l_2) \circ rev(nil) \overset{(*)}{=} rev(l_2) \circ rev(l_1)$.

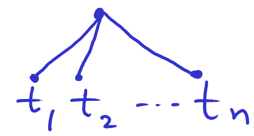
② $\boxed{l_1 = h::l_1'}$ (**):

Árvores:



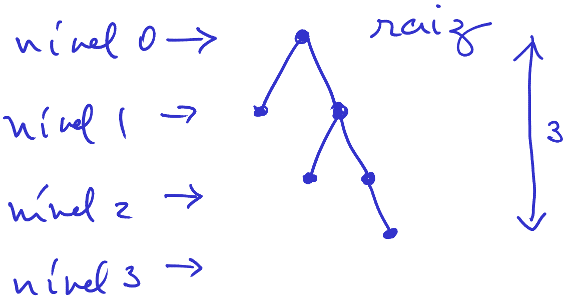
raiz: é um nó que não possui pai.

folhas: são nós que não possuem filhos.

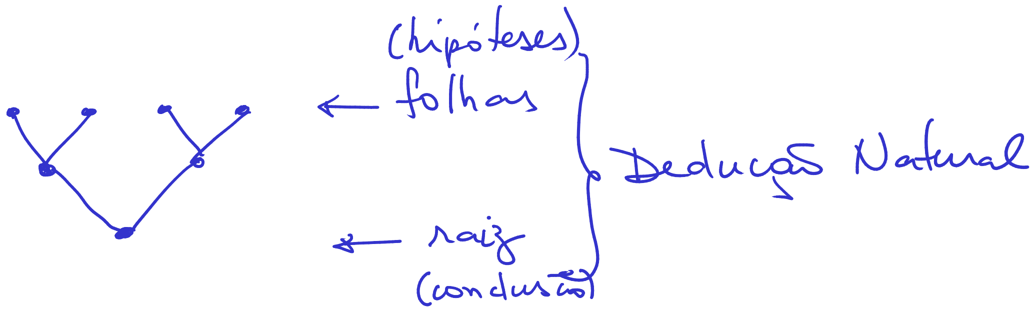
Def. (Indutivamente) $t ::= \bullet \mid$ 

- Um nó é uma árvore
- Se $t_1, t_2, \dots, t_n$ $(n \geq 1)$ são árvores então podemos construir uma nova árvore a partir de um novo vértice (raiz) que possui as raízes de $t_1, t_2, \dots, t_n$ como filhos.

Obs: As árvores são organizadas em níveis.



A altura de uma árvore é o maior nível das suas folhas.



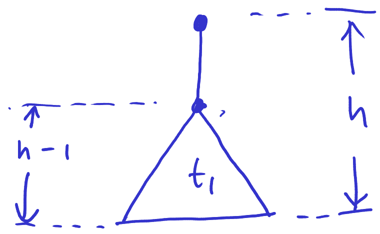
Exercício: Seja T uma árvore binária com altura h e n nós. Então $n \leq 2^{h+1} - 1$.

Solução: Indução em h.

- $h = 0$: Neste caso T é um nó: •

  Logo, $n = 1 \leq 2^{0+1} - 1 = 1$. ✓

- $\boxed{h > 0}$: Temos 2 casos:

① 

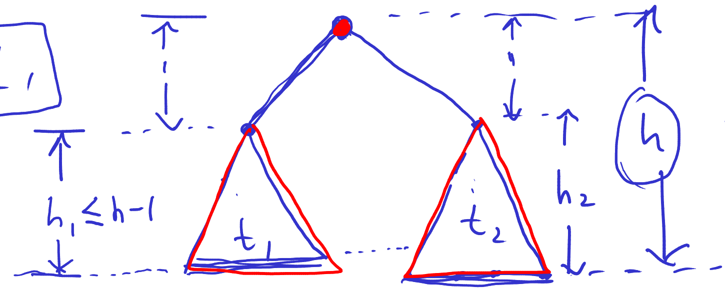
hipótese de indução

t_1: $\boxed{n_1 \leq 2^h - 1}$

Queremos provar que $n \leq 2^{h+1} - 1$.

$$n = n_1 + 1 \overset{(h.i)}{\leq} (2^h - 1) + 1 = 2^h \leq 2^{h+1} - 1 \text{ já}$$

$$\text{que } 2^{h+1} - 1 = 2^h + \underbrace{2^h - 1}_{\substack{>0 \\ \text{pois } h>0}} \geq 2^h.$$

② 

$\boxed{n_1 \leq 2^{(h-1)+1} - 1}$ → $2^h - 1$

hipótese indução:

t_1: $\boxed{n_1 \leq 2^{h_1+1} - 1}$

t_2: $\boxed{n_2 \leq 2^{h_2+1} - 1}$

Sabemos que t_1 possui, no máximo $2^{h_1+1} - 1$ nós.

" " t_2 " " $2^{h_2+1} - 1$ nós

$$n = n_1 + n_2 + 1 \overset{h.i.}{\leq} \underbrace{(2^{h_1+1} - 1)}_{(2^h - 1)} + \underbrace{(2^{h_2+1} - 1)}_{(2^h - \cancel{1})} + \cancel{1} \leq (2^h - 1) + (2^h - \cancel{1}) + \cancel{1} = 2^{h+1} - 1$$

$$\boxed{n \leq 2^{h+1} - 1}$$