Aula 13 – Glivenko - gabarito

segunda-feira, 7 de março de 2022 20:53

Considere o seguinte exercício:

Prove o teorema de Glivenko: Sejam Γ um conjunto finito de fórmulas, e φ uma fórmu qualquer da lógica proposicional. Prove que se φ tem uma prova clássica a partir d Γ então $\neg\neg\varphi$ tem uma prova intuicionista a partir de Γ, ou seja, se $\Gamma \vdash_c \varphi$ ent $\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi$

1. Qual a estratégia que você utilizaria para resolvê-lo?

   Indução na estrutura da derivação clássica.

2. Resolva pelo menos parte do exercício com a estratégia proposta.

Teorema de Glivenko: $\boxed{\Gamma \vdash_c \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi}$

Prova: $\boxed{\text{Indução em } \Gamma \vdash_c \varphi.}$ Considere a última regra que gera a árvore $\Gamma \vdash_c \varphi$:

(1) ($\wedge_i$) Se a última regra de $\Gamma \vdash_c \varphi$ é ($\wedge_i$), temos:

$\boxed{\Gamma \vdash_c \varphi_1 \Rightarrow \Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi_1}$ (h.i.1)

$\boxed{\Gamma \vdash_c \varphi_2 \Rightarrow \Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi_2}$ (h.i.2)

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \triangledown \\ \varphi_1\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Gamma \\ \triangledown \\ \varphi_2\end{matrix}}{\underbrace{\varphi_1 \wedge \varphi_2}_{\varphi}}(\wedge_i)$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \text{h.i.}_2 \\ \neg\neg\varphi_2\end{matrix} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \text{h.i.}_1 \\ \neg\neg\varphi_1\end{matrix} \quad \dfrac{\dfrac{\cancel{[\neg(\varphi_1\wedge\varphi_2)]^u} \quad \dfrac{\cancel{[\varphi_1]^v} \quad \cancel{[\varphi_2]^w}}{\varphi_1\wedge\varphi_2}(\wedge i)}{\bot}(\neg e)}{\neg\varphi_1}(\neg i)\,v}{\bot}(\neg e)}{\neg\varphi_2}(\neg i)\,w}{\bot}(\neg e)}{\underbrace{\neg\neg(\varphi_1\wedge\varphi_2)}_{\neg\neg\varphi}}(\neg i)\,u$$

LPC: $\wedge i$ (1) ✓, $\wedge e$ (2), $\vee i$ (3), $\vee e$ (4), $\rightarrow i$ (5), $\rightarrow e$ (6) ✓, $\boxed{\text{LP},\ \text{PBC},\ \neg\neg e,\ \text{LTE}}$ (7)

(2) ($\rightarrow_e$)

$\begin{matrix}\Gamma \\ \triangledown_c\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Gamma \\ \triangledown_c\end{matrix}$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \psi\to\varphi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ \psi\end{matrix}}{\varphi}\,(\to e)$$

$$\boxed{\Gamma \vdash_c \psi\to\varphi \;\Longrightarrow\; \Gamma \vdash_i \neg\neg(\psi\to\varphi)}\ (h.i_1)$$

$$\boxed{\Gamma \vdash_c \psi \;\Longrightarrow\; \Gamma \vdash_i \neg\neg\psi}\ (h.i_2)$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ h.i_1\end{matrix}}{\neg\neg(\psi\to\varphi)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^u \qquad \dfrac{[\psi]^v \quad [\psi\to\varphi]^w}{\varphi}\,(\to e)}{\perp}\,(\neg e)}{\neg\psi}\,(\neg i)\,v \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ h.i_2\end{matrix}}{\neg\neg\psi}}{\perp}\,(\neg e)}{\neg(\psi\to\varphi)}\,(\neg i)\,w}{\dfrac{\perp}{\neg\neg\varphi}\,(\neg i)\,u}\,(\neg e)$$