

14 de março de 2022

Lista: Lógica de Predicados

1. Com derivações em Dedução Natural, prove as seguintes equivalências.

(a) $\neg\forall x \phi \dashv\vdash \exists x \neg\phi$

(b) $\forall x \phi \dashv\vdash \neg\exists x \neg\phi$

(c) $\exists x \phi \dashv\vdash \neg\forall x \neg\phi$

2. Apresente derivações em Dedução Natural, para os seguintes a seguir assumindo que x não ocorre livre em ψ :

(a) $(\forall x \phi) \wedge \psi \vdash \forall x (\phi \wedge \psi)$

(b) $(\exists x \phi) \wedge \psi \vdash \exists x (\phi \wedge \psi)$

(c) $\forall x (\psi \rightarrow \phi) \vdash \psi \rightarrow \forall x \phi$

(d) $\forall x (\phi \rightarrow \psi) \vdash (\exists x \phi) \rightarrow \psi$

3. Prove que não existe uma derivação intuicionista para

(a) $\neg\exists x \neg\varphi \vdash \forall x \varphi$

(b) $\neg\forall x \neg\varphi \vdash \exists x \varphi$

Dica: Mesmo que existam derivações clássicas destes sequentes, isto não implica que eles sejam estritamente clássicos. Para concluir que um sequente não possui uma derivação intuicionista, mostre que a partir dele (e das regras intuicionistas) é possível provar algum teorema estritamente clássico.

4. Considere a seguinte transformação:

- $T(p) = p$
- $T(\neg\phi) = \neg T(\phi)$

- $T(\phi \wedge \psi) = T(\phi) \wedge T(\psi)$
- $T(\phi \vee \psi) = \neg(\neg T(\phi) \wedge \neg T(\psi))$
- $T(\phi \rightarrow \psi) = \neg(T(\phi) \wedge \neg T(\psi))$
- $T(\forall x\phi) = \forall xT(\phi)$
- $T(\exists x\phi) = \neg\forall x\neg T(\phi)$

Mostre que para qualquer fórmula ϕ , $T(\phi)$ é equivalente a ϕ .

5. Seja φ uma fórmula da lógica de predicados. Definimos a tradução negativa de Gödel-Gentzen de φ , denotada por φ^N , indutivamente por:

$$\varphi^N = \begin{cases} \neg\neg\varphi & \text{se } \varphi \text{ é uma fórmula atômica} \\ \neg(\psi^N) & \text{se } \varphi = \neg\psi \\ \varphi_1^N \wedge \varphi_2^N & \text{se } \varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \\ \neg(\neg(\varphi_1^N) \wedge \neg(\varphi_2^N)) & \text{se } \varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2 \\ \varphi_1^N \rightarrow \varphi_2^N & \text{se } \varphi = \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \\ \forall_x(\psi^N) & \text{se } \varphi = \forall_x\psi \\ \neg(\forall_x\neg(\psi^N)) & \text{se } \varphi = \exists_x\psi \end{cases}$$

Construa uma prova intuicionista para o sequente a seguir: $\neg\neg(\varphi^N) \vdash_i \varphi^N$

6. Uma fórmula da lógica de predicados ϕ pertence ao *fragmento negativo* se ϕ pode ser construída a partir da seguinte gramática, onde t_1, t_2, \dots, t_n ($n > 0$) são termos:

$$\phi ::= \neg p(t_1, t_2, \dots, t_n) \parallel \perp \parallel (\neg\phi) \parallel (\phi \wedge \phi) \parallel (\phi \rightarrow \phi) \parallel (\forall_x\phi)$$

Prove na lógica minimal que $\neg\neg\theta \vdash_m \theta$ para qualquer fórmula θ pertencente ao fragmento negativo. Use indução na estrutura de θ .