Semântica da Lógica de Primeira Ordem

Estruturas aparecem em matemática rotineiramente. Por exemplo, um grupo é um conjunto não-vazio equipado com duas operações, sendo uma binária, uma unária e com um elemento neutro que satisfaz certas leis. A seguir definiremos formalmente o que são estruturas, mas iniciaremos com a definição de relação:

Definição 1. *Uma relação R n-ária ($n \geq 0$) sobre um conjunto não-vazio A é um subconjunto de A^n.*

Definição 2. *Uma* estrutura $\mathfrak{A}$ *sobre o conjunto $S = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$ (de símbolos de função e de relação, respectivamente) é um par $(A, \mathfrak{a})$ com as seguintes propriedades:*

1. *A é um conjunto não-vazio chamado de* universo *ou* domínio *de $\mathfrak{A}$;*

2. *$\mathfrak{a}$ é uma função definida sobre o conjunto S satisfazendo as seguintes propriedades:*

   (a) *para cada constante (função da aridade 0), $f \in \mathcal{F}$, associamos um elemento $\mathfrak{a}(f)$ de A;*

   (b) *para cada símbolo de função $f \in \mathcal{F}$ de aridade $n > 0$, $\mathfrak{a}(f)$ é uma função A^n para A;*

   (c) *para cada símbolo de relação (predicado) $p \in \mathcal{P}$ de aridade $n > 0$, $\mathfrak{a}(p)$ é uma relação n-ária em A, ou seja, um subconjunto de A^n.*

Ao invés de $\mathfrak{a}(p)$, $\mathfrak{a}(f)$ escreveremos, respectivamente, $p^{\mathfrak{A}}$, $f^{\mathfrak{A}}$. Uma estrutura $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ sobre os conjuntos $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ e $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_m\}$ será escrita na forma $\mathfrak{A} = (A, p_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, p_m^{\mathfrak{A}}, f_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, f_n^{\mathfrak{A}})$.

Exemplo 3.

1. $(\mathbb{R}, +, \cdot, {}^{-1}, 0, 1)$ - *o corpo dos números reais;*

2. $(\mathbb{N}, \leq)$ - *o conjunto ordenado dos números naturais;*

3. $(\mathbb{Z}, <, +, -, 0)$ - *o grupo ordenado dos números inteiros (com a soma usual). Observe que, neste caso $-$ é uma função unária, enquanto que $+$ é binária;*

4. $(\mathbb{Q}, \cdot, {}^{-1}, 1)$ - *o grupo (abeliano) dos números racionais (com a multiplicação usual);*

5. $(\mathbb{Z}, +, \cdot, {}^{-1}, 0, 1)$ - *o anel dos números inteiros.*

Notação: $|\mathfrak{A}| = A$, o universo de $\mathfrak{A}$. A estrutura $\mathfrak{A}$ é dita (in)finita se o seu universo é (in)finito.

Definição 4. *Uma função de atribuição (ou designação) em uma estrutura $\mathfrak{A}$ é uma função $l : var \to A$. Denotaremos por $l[x \mapsto a]$ a função de atribuição que leva x em a e qualquer outro valor y é levado em $l(y)$.*

Definição 5. *Uma interpretação $\mathfrak{I}$ é um par $(\mathfrak{A}, i)$, onde $\mathfrak{A}$ é uma estrutura e i é uma designação.*

Exemplo 6. *Por exemplo, se a interpretação $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, i)$ é tal que $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, 0, 1)$ e $i(v_n) = 2n$ então a fórmula $v_2 \cdot (v_1 + v_2) = v_4$ é lida como $4 \cdot (2 + 4) = 8$. Já a fórmula $\forall v_0 \exists v_1 (v_0 < v_1)$ é lida como "para todo número natural v_0 existe um número natural v_1 maior do que v_0".*

Exercícios

1. Considere a interpretação $\mathfrak{I}$ dada no exemplo anterior. Como as fórmulas a seguir são lidas com esta interpretação?

   (a) $\exists v_0 (v_0 + v_0 = v_1)$

   (b) $\exists v_0 (v_0 \cdot v_0 = v_1)$

   (c) $\exists v_1 (v_0 = v_1)$

   (d) $\forall v_0 \exists v_1 (v_0 = v_1)$

   (e) $\forall v_0 \forall v_1 \exists v_2 (v_0 < v_1 \land v_2 < v_1)$

Modelos

A noção de satisfação que definiremos nesta seção tornará precisa a noção de quando uma fórmula é verdadeira sob uma dada interpretação. A definição a seguir mostra como termos são interpretados:

Definição 7. *Seja $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, i)$ uma interpretação. Então:*

1. *para cada variável x, definimos $\mathfrak{I}(x) := i(x)$;*

2. *para cada constante c, definimos $\mathfrak{I}(c) := c^{\mathfrak{A}}$;*

3. *para cada símbolo de função f de aridade n, e termos $t_1, \ldots, t_n$, definimos $\mathfrak{I}(f(t_1, \ldots, t_n)) := f^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}(t_n))$.*

Agora podemos utilizar indução sobre a estrutura das fórmulas para definir a relação "$\mathfrak{I}$ é um modelo da fórmula ϕ", onde $\mathfrak{I}$ é uma interpretação arbitrária.

Definição 8. *Para toda interpretação* $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, i)$*, dizemos que* $\mathfrak{I}$ *satisfaz a fórmula* ϕ *(notação* $\mathfrak{I} \models \phi$*) da seguinte forma:*

- $\mathfrak{I} \models a = b$ *sse* $\mathfrak{I}(a)$ *e* $\mathfrak{I}(b)$ *representam o mesmo elemento do universo* A *de* $\mathfrak{A}$*;*
- $\mathfrak{I} \models R\, t_0 \ldots t_{n-1}$ *sse* $R^{\mathfrak{A}}\ \mathfrak{I}(t_0) \ldots \mathfrak{I}(t_{n-1})$*, i.e., se a* n*-upla* $(\mathfrak{I}(t_0), \ldots, \mathfrak{I}(t_{n-1}))$ *está no subconjunto de* A^n *que corresponde a interpretação de* R*;*
- $\mathfrak{I} \models \neg\phi$ *sse não é o caso que* $\mathfrak{I} \models \phi$*;*
- $\mathfrak{I} \models \phi \wedge \psi$ *sse* $\mathfrak{I} \models \phi$ *e* $\mathfrak{I} \models \psi$*;*
- $\mathfrak{I} \models \phi \vee \psi$ *sse* $\mathfrak{I} \models \phi$ *ou* $\mathfrak{I} \models \psi$*;*
- $\mathfrak{I} \models \phi \rightarrow \psi$ *sse se* $\mathfrak{I} \models \phi$ *então* $\mathfrak{I} \models \psi$*;*
- $\mathfrak{I} \models \phi \leftrightarrow \psi$ *sse* $\mathfrak{I} \models \phi$ *se, e somente se,* $\mathfrak{I} \models \psi$*;*
- $\mathfrak{I} \models \forall_x \phi$ *sse para todo* $a \in A$ *tal que* $\mathfrak{I}\frac{x}{a} \models \phi$*;*
- $\mathfrak{I} \models \exists_x \phi$ *sse existe* $a \in A$ *tal que* $\mathfrak{I}\frac{x}{a} \models \phi$*.*

Dado um conjunto S de fórmulas, dizemos que $\mathfrak{I}$ é um modelo de S (notação $\mathfrak{I} \models S$) se $\mathfrak{I} \models \phi$ para todo $\phi \in S$.

Definição 9. *Seja* ϕ *uma fórmula da lógica de primeira ordem. Dizemos que* ϕ *é:*

- satisfatível*, se existe uma interpretação* $\mathcal{M}$ *que é modelo de* ϕ*;*
- insatisfatível*, se não possui modelos;*
- válida*, se qualquer interpretação* $\mathcal{M}$ *é modelo de* ϕ*;*
- inválida*, se existe uma interpretação* $\mathcal{M}$ *que não é modelo de* ϕ*.*

Exemplo 10. *Seja* $\mathcal{F} = \{e, \cdot\}$ *e* $\mathcal{P} = \{\leq\}$*, onde e é uma constante,* $\cdot$ *é uma função binária e* $\leq$ *é um predicado binário. Considere o modelo* $\mathcal{M}$*, onde* A *é o conjunto de todas as* strings *(palavras) sobre o alfabeto* $\{0, 1\}$ *incluindo a palavra vazia que denotaremos por* ϵ*. A interpretação* $e^{\mathcal{M}}$ *corresponde a palavra vazia* ϵ*, enquanto que* $\cdot^{\mathcal{M}}$ *corresponde a concatenação de palavras. Por exemplo,* $010111 \cdot^{\mathcal{M}} 1100$ *é igual a* 0101111100*. Em geral, se* $a_1a_2 \ldots a_k$ *e* $b_1b_2 \ldots b_r$ *são palavras com* $a_i, b_j \in \{0, 1\}$ *então* $a_1a_2 \ldots a_k \cdot^{\mathcal{M}} b_1b_2 \ldots b_r$ *é igual a* $a_1a_2 \ldots a_kb_1b_2 \ldots b_r$*. Finalmente, interpretamos* $\leq$ *como a relação de prefixo sobre palavras, isto é,* $x \leq y$ *significa "*x *é prefixo de* y*".*

Dizemos que s_1 *é um prefixo de* s_2 *se existir uma palavra* s_3 *tal que* s_2 *é igual a* $s_1 \cdot^{\mathcal{M}} s_3$*.*

1. *Em nosso modelo, a fórmula* $\forall_x((x \leq x \cdot e) \wedge (x \cdot e \leq x))$ *diz que qualquer palavra é um prefixo dela mesma concatenado com a palavra vazia e vice-versa. Esta fórmula claramente é verdadeira em nosso modelo.*

2. *Em nosso modelo, a fórmula* $\exists_y \forall_x (y \leq x)$ *diz que existe uma palavra* s *que é prefixo de todas as outras palavras. Esta fórmula é verdadeira porque podemos tomar* ϵ *como sendo a tal palavra. Note que, de fato, esta é a única escolha possível neste caso.*

3. *Em nosso modelo, a fórmula* $\forall_x \exists_y (y \leq x)$ *diz que toda palavra possui um prefixo. Isto também é verdade e, em geral, existem muitas escolhas possíveis que dependem de* x.

4. *Em nosso modelo, a fórmula* $\forall_x \forall_y \forall_z ((x \leq y) \to (x \cdot z \leq y \cdot z))$ *diz que sempre que a palavra* s_1 *for um prefixo da palavra* s_2 *então a palavra* $s_1 s$ *tem que ser um prefixo da palavra* $s_2 s$ *para toda palavra* s. *Esta fórmula é falsa em nosso modelo: basta tomar* $s_1 = 01$, $s_2 = 011$ *e* $s = 0$.

5. *Em nosso modelo a fórmula* $\forall_y \exists_x ((x \leq y) \to (y \leq x))$ *diz que para qualquer palavra* s *existe uma palavra* s' *(que depende de* s *e) que é prefixo a* s *e tal que* s' *é também prefixo de* s. *Isto é verdadeiro, pois podemos considerar* s' *como sendo a própria* s.

6. *Em nosso modelo a fórmula* $\exists_x \forall_y ((x \leq y) \to (y \leq x))$ *diz que existe uma palavra* s *que seja prefixo de (toda) palavra* s_1 *é tal que* s_1 *é também prefixo de* s. *Isto é falso, pois a única palavra que é prefixo de todas as outras é a palavra vazia, no entanto apenas a palavra vazia é prefixo dela mesma.*

Exemplo 11. *Seja* $\mathcal{F} = \{\texttt{maria}\}$ *e* $\mathcal{P} = \{\texttt{ama}\}$, *onde* `maria` *é uma constante e* `ama` *é um predicado binário. O modelo* $\mathcal{M}$ *que estamos construindo consiste de* $A = \{a, b, c\}$, *da função constante* $\texttt{maria}^{\mathcal{M}} = a$ *e do predicado* $\texttt{ama}^{\mathcal{M}} = \{(a,a), (b,a), (c,a)\}$.

Queremos verificar se $\mathcal{M}$ *satisfaz a seguinte sentença:*

Nenhuma das pessoas que amam as pessoas que amam `maria` *ama* `maria`.

Inicialmente precisamos codificar esta sentença na LPO:

$$\forall_x \forall_y (ama(x, \texttt{maria}) \wedge ama(y, x) \to \neg ama(y, \texttt{maria}))$$

Escolhendo a *para* x *e* b *para* y *é fácil ver que este modelo não satisfaz esta fórmula.*

E se considerarmos o modelo $\mathcal{M}'$ *onde* A *permanece inalterado e* $\texttt{maria}^{\mathcal{M}'} = \texttt{maria}^{\mathcal{M}}$ *e* $\texttt{ama}^{\mathcal{M}'} = \{(b,a), (c,b)\}$? *Neste caso, a sentença*

$$\forall_x \forall_y (ama(x, \texttt{maria}) \wedge ama(y, x) \to \neg ama(y, \texttt{maria}))$$

é verdadeira em $\mathcal{M}'$.

Exercícios

1. Seja P um símbolo de predicado unário e f uma função binária. Para cada uma das fórmulas $\forall_{v_1} f(v_0, v_1) = v_0$, $\exists_{v_0}\forall_{v_1} f(v_0, v_1) = v_1$ e $\exists_{v_0}(P(v_0) \wedge \forall_{v_1} P(f(v_0, v_1)))$ encontre uma interpretação que satisfaz a fórmula e uma que não a satisfaz.

2. Fórmulas que não contêm $\neg$, $\leftrightarrow$ ou $\rightarrow$ são chamadas de positivas. Mostre que toda fórmula positiva é satisfatível.

Consequência lógica

Na lógica proposicional dizemos que ψ é consequência lógica de $\phi_1, \ldots, \phi_n$, denotado por $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$, quando ψ é verdadeira sempre que $\phi_1, \ldots, \phi_n$ o forem. Como estender esta noção para a lógica de primeira ordem considerando que $\mathcal{M} \models \psi$?

Definição 12. *Seja Γ um conjunto (possivelmente infinito) de fórmulas da LPO e ψ uma fórmula da LPO.*

1. *A fórmula ψ é consequência lógica do conjunto Γ (notação $\Gamma \models \psi$) sse todo modelo de Γ é também modelo de ψ.*

2. *O conjunto Γ é satisfatível (ou consistente) sse existe uma estrutura $\mathcal{M}$ que é modelo de Γ, i.e. $\mathcal{M} \models \Gamma$.*

O símbolo $\models$ é utilizado aqui tanto para representar a noção de consequência lógica como para checagem de modelos. Computacionalmente estas duas noções são complicadas:

1. Verificar que $\mathcal{M} \models \phi$ de forma mecânica (isto é, por uma máquina) pode se tornar muito difícil se o universo A de $\mathcal{M}$ for infinito. Neste caso, checar uma sentença da forma $\forall_x \psi$, onde x ocorre livre em ψ significa verificar $\mathcal{M} \models_{[x \mapsto a]} \psi$ para um número infinito de elementos.

2. Verificar que $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$ vale é ainda mais complicado já que precisaríamos considerar *todos os possíveis modelos* que possuem a estrutura adequada. Lembre-se que na lógica proposicional isto é feito via tabelas-verdade.

Para alguns casos particulares podemos raciocinar sobre a noção de consequência lógica na LPO utilizando argumentos que não dependem de um modelo específico. Infelizmente isto só é possível para um número muito limitado de casos. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 13. *Considere $\forall_x(p(x) \rightarrow q(x)) \models \forall_x p(x) \rightarrow \forall_x q(x)$. Seja $\mathcal{M}$ um modelo que satisfaz a fórmula $\forall_x(p(x) \rightarrow q(x))$. Precisamos mostrar que $\mathcal{M}$ satisfaz $\forall_x p(x) \rightarrow \forall_x q(x)$. Se algum dos elementos de $\mathcal{M}$ não satisfaz p então $\forall_x p(x)$ é falsa e portanto $\forall_x p(x) \rightarrow \forall_x q(x)$ é verdadeiro, e não há nada a fazer. Caso contrário, isto é, se $\mathcal{M}$ satisfaz $\forall_x p(x)$ então $\mathcal{M} \models_{l[x \mapsto a]} p(x)$ para todo $a \in A$, e como $\mathcal{M}$ satisfaz $\forall_x(p(x) \rightarrow q(x))$ temos que $\mathcal{M} \models_{l[x \mapsto a]} q(x)$ para todo $a \in A$. Portanto $\mathcal{M}$ satisfaz $\forall_x q(x)$. Assim conseguimos mostrar que $\forall_x(p(x) \rightarrow q(x)) \models \forall_x p(x) \rightarrow \forall_x q(x)$ vale utilizando argumentos que independem do modelo $\mathcal{M}$.*

Exemplo 14. *E quanto a $\forall_x p(x) \to \forall_x q(x) \models \forall_x(p(x) \to q(x))$? Agora as coisas ficam muito mais complicadas... Suponha que $\mathcal{M}'$ é um modelo que satisfaz $\forall_x p(x) \to \forall_x q(x)$. Se A' é o universo associado a este modelo e $p^{\mathcal{M}'}$ e $q^{\mathcal{M}'}$ são as respectivas interpretações de p e q então $\mathcal{M}' \models \forall_x p(x) \to \forall_x q(x)$ simplesmente nos diz que se $p^{\mathcal{M}'}$ é igual ao conjunto A' então $q^{\mathcal{M}'}$ também é igual ao conjunto A'. Mas se este não é o caso, então o fato de a implicação $\forall_x p(x) \to \forall_x q(x)$ ser verdadeira não nos fornece nenhuma informação adicional. A partir destas observações podemos construir um contra-exemplo: seja $A' = \{a, b\}$, $p^{\mathcal{M}'} = \{a\}$ e $q^{\mathcal{M}'} = \{b\}$. Então $\mathcal{M}' \models \forall_x p(x) \to \forall_x q(x)$ vale, mas $\mathcal{M}' \models \forall_x(p(x) \to q(x))$ não vale.*

Exercícios

1. Considere a fórmula $\phi = \forall_x\forall_y(q(g(x,y), g(y,y), z))$. Construa duas interpretações $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}'$ tais que $\mathcal{M} \models \phi$ e $\mathcal{M}' \not\models \phi$.

2. Considere a sentença $\phi = \forall_x\exists_y\exists_z(p(x,y) \land p(z,y) \land (p(x,z) \to p(z,x)))$. Quais das seguintes interpretações dadas a seguir satisfazem ϕ?

   (a) A interpretação $\mathcal{M}$ possui como domínio o conjunto dos números naturais, e $p^{\mathcal{M}} = \{(m,n) \mid m < n\}$;

   (b) A interpretação $\mathcal{M}'$ possui como domínio o conjunto dos números naturais, e $p^{\mathcal{M}'} = \{(m, 2m) \mid m$ é um número natural$\}$;

   (c) A interpretação $\mathcal{M}''$ possui como domínio o conjunto dos números naturais com $p^{\mathcal{M}''} = \{(m,n) \mid m < n+1\}$.

3. Considere a sentença $\forall_x \neg p(x,x)$. Construa uma interpretação que satisfaz esta sentença e outra que não a
satisfaça.

4. Considere as seguintes sentenças:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \forall_x p(x,x) \\
\phi_2 &= \forall_x\forall_y(p(x,y) \to p(y,x)) \\
\phi_3 &= \forall_x\forall_y\forall_z(p(x,y) \land p(y,z) \to p(x,z))
\end{aligned}$$

   que expressam a reflexividade, simetria e transitividade do predicado p. Mostre que nenhuma destas sentenças é consequência lógica das outras duas escolhendo, para cada par de sentenças uma interpretação que satisfaça estas duas sentenças, mas não satisfaça a terceira. Essencialmente você deve encontrar três relações binárias onde cada uma satisfaz apenas duas destas propriedades.

5. Mostre que $\forall_x \neg\phi \models \neg\exists_x \phi$. Para isto considere uma interpretação genérica $\mathcal{M}$ e mostre que se $\mathcal{M} \models \forall_x \neg\phi$ então $\mathcal{M} \models \neg\exists_x\phi$ vale.

6. Seja ϕ sentença $\forall_x\forall_y\exists_z(r(x,y) \to r(y,z))$.

   (a) Seja $\mathcal{M}$ uma interpretação onde $A = \{a,b,c,d\}$ e $r^{\mathcal{M}} = \{(b,c),(b,b),(b,a)\}$. É o caso que $\mathcal{M} \models \phi$?

(b) Seja $\mathcal{M}'$ uma interpretação onde $A' = \{a, b, c\}$ e $r^{\mathcal{M}'} = \{(b, c), (a, b), (c, b)\}$. É o caso que $\mathcal{M}' \models \phi$?

7. É o caso que $\forall_x(p(x) \vee q(x)) \models \forall_x p(x) \vee \forall_x q(x)$? Em caso afirmativo, construa uma prova, e em caso negativo justifique sua resposta.

8. É o caso que $\exists_x(p(x) \vee q(x)) \models \exists_x p(x) \vee \exists_x q(x)$? Em caso afirmativo, construa uma prova, e em caso negativo justifique sua resposta.

9. Considere as seguintes sentenças:

$$\begin{array}{l} \forall_x(\exists_y(x + y = 0) \wedge \exists_z(z + x = 0)) \\ \forall_x((x + 0 = x) \wedge (0 + x = x)) \\ \forall_x \forall_y \forall_z(x + (y + z) = (x + y) + z) \end{array}$$

Seja γ a conjunção destas três sentenças.

(a) Mostre que γ é satisfatível.

(b) Mostre que γ não é uma tautologia.

(c) Mostre que a sentença $\forall_x \forall_y(x + y = y + x)$ não é consequência lógica de γ.