$$\boxed{\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi} (\neg\neg_i)} \quad \Leftarrow \text{regra derivada.}$$

Talvez você esteja esperando agora a derivação da eliminação da dupla negação para se juntar a regra anterior, mas infelizmente isto não é possível neste momento porque o poder de expressividade que temos até agora com as regras ($\rightarrow_e$), ($\rightarrow_i$), ($\neg_i$) e ($\neg_e$) não é suficiente para provarmos a eliminação da dupla negação. Mas para deixá-lo intrigado provaremos o seguinte seqüente: $\boxed{\neg\neg\varphi \vdash \neg\varphi}$.

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\neg\neg\varphi, \varphi \vdash \varphi}}{\neg\neg\varphi, \varphi \vdash \neg\varphi} (\text{Ax})}{\neg\neg\varphi, \varphi \vdash \perp} (\neg_e)}{\neg\neg\varphi \vdash \neg\varphi} (\neg_i)$$

O seqüente anterior é a prova da eliminação da dupla negação de uma **fórmula negada**, e isto faz toda a diferença. Voltaremos a falar da eliminação da dupla negação na seção sobre lógica proposicional clássica.

Exercício 10. *Sejam φ e ψ fórmulas da lógica proposicional. Prove o seqüente $\neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \vdash (\neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\neg\psi)$*

A regra de introdução da conjunção, denotada por ($\wedge_i$), nos diz o que precisamos fazer para construir uma prova de um seqüente que possui uma conjunção na conclusão, isto é, um seqüente da forma $\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$, onde Γ é um conjunto finito de fórmulas da LP, e φ_1 e φ_2 são fórmulas da LP. A regra ($\wedge_i$) é dada pela seguinte regra de inferência:

$$\boxed{\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \quad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2} (\wedge_i)} \quad (2.2)$$

ou seja, uma prova de $\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$ é construída a partir de uma prova de $\Gamma \vdash \varphi_1$ e de uma prova de $\Gamma \vdash \varphi_2$.

Existem duas regras de eliminação para a conjunção já que podemos extrair qualquer uma das componentes de uma conjunção:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1} (\wedge_{e1}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_2} (\wedge_{e2})$$

Estas duas regras podem ser representadas de forma mais concisa da seguinte forma:

$$\boxed{\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}} (\wedge_e)} \quad (2.3)$$

Usaremos o nome ($\wedge_e$) para designar a utilização da regra de eliminação da conjunção quando não quisermos especificar qual das regras ($\wedge_{e1}$) ou ($\wedge_{e2}$) foi utilizada.

Com as regras da conjunção já podemos fazer um exercício interessante: provar a comutatividade da conjunção, isto é, queremos construir uma prova para o seqüente $\varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi$, onde φ e ψ são fórmulas

quaisquer da LP. A construção da prova é feita inicialmente de baixo para cima com a aplicação da regra $(\wedge_i)$:

$$\frac{\frac{?}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi} \quad \frac{?}{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi}}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi} (\wedge_i)$$

Concluimos com a regra de eliminação da conjunção e o axioma:

$$\frac{\frac{\frac{}{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi \wedge \psi} (\text{Ax})}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi} (\wedge_e) \quad \frac{\frac{}{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi \wedge \psi} (\text{Ax})}{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi} (\wedge_e)}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi} (\wedge_i)$$

Exercício 11. Prove que a conjunção é associativa, isto é, prove o sequente $(\varphi \wedge \psi) \wedge \rho \vdash \varphi \wedge (\psi \wedge \rho)$, onde φ , ψ e ρ são fórmulas quaisquer da lógica proposicional.

Vejamos agora as regras para a disjunção. A regra de introdução da disjunção nos permite construir a prova de uma disjunção a partir da prova de qualquer uma das suas componentes:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} (\vee_{i_1}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} (\vee_{i_2})$$

Como no caso da regra de eliminação da conjunção podemos representar estas duas regras de forma mais compacta:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} (\vee_i)$$

A regra de eliminação da disjunção nos permite construir a prova de uma fórmula, digamos γ , a partir de uma disjunção. Para isto, precisamos de duas provas distintas de γ , cada uma assumindo uma das componentes da disjunção separadamente:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \Gamma, \varphi_1 \vdash \gamma \quad \Gamma, \varphi_2 \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \gamma} (\vee_e)$$

Assim, para que tenhamos uma prova de γ a partir das fórmulas em Γ (sequente $\Gamma \vdash \gamma$) precisamos de uma prova de γ a partir de φ_1 e das fórmulas de Γ (sequente $\Gamma, \varphi_1 \vdash \gamma$) e de outra prova de γ a partir de φ_2 e das fórmulas de Γ (sequente $\Gamma, \varphi_2 \vdash \gamma$). Observe como os contextos mudam em cada um dos sequentes que compõem esta regra.

Exemplo 12. Vamos mostrar que a disjunção é comutativa, ou seja, queremos construir uma prova para o sequente $\varphi \vee \psi \vdash \psi \vee \varphi$. A ideia aqui é utilizarmos a regra $(\vee_e)$. Para isto podemos instanciar Γ com o conjunto unitário contendo a fórmula $\varphi \vee \psi$. Em função da estrutura da regra $(\vee_e)$, precisamos construir duas provas distintas de $\psi \vee \varphi$: uma a partir de φ , e outra a partir de ψ . Podemos fazer isto

	Regras de introdução	Regras de eliminação
1	$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \quad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2} (\wedge_i)$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}} (\wedge_e)$
2	$\frac{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} (\vee_i)$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \Gamma', \varphi_1 \vdash \gamma \quad \Gamma'', \varphi_2 \vdash \gamma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \gamma} (\vee_e)$
3	$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i)$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi} (\rightarrow_e)$
4	$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \varphi} (\neg_i)$	$\frac{\Gamma \vdash \neg \varphi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \perp} (\neg_e)$

Tabela 2.1: Regras da **Lógica Minimal**

com a ajuda da regra $(\vee_i)$:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\frac{\overline{\varphi \vee \psi} \text{ (Ax)}}{\varphi \vee \psi} \text{ (Ax)}}{\varphi \vee \psi \vdash \varphi \vee \psi} \text{ (Ax)} \quad \frac{\frac{\overline{\varphi \vdash \varphi} \text{ (Ax)}}{\varphi \vdash \varphi} \text{ (Ax)} \quad \frac{\overline{\psi \vdash \psi} \text{ (Ax)}}{\psi \vdash \psi} \text{ (Ax)}}{\varphi \vdash \psi \vee \varphi} \text{ (}\vee_i\text{)} \quad \frac{\overline{\psi \vdash \psi} \text{ (Ax)}}{\psi \vdash \psi \vee \varphi} \text{ (}\vee_i\text{)}}{\varphi \vee \psi \vdash \psi \vee \varphi} \text{ (}\vee_e\text{)}
 \end{array}$$

Exercício 13. Sejam φ , ψ e ρ fórmulas quaisquer da lógica proposicional. Prove que a disjunção é associativa, isto é, prove o sequente $(\varphi \vee \psi) \vee \rho \vdash \varphi \vee (\psi \vee \rho)$.

A Tabela 2.1 apresenta as regras vistas até aqui. Estas regras formam a chamada *lógica proposicional minimal*.

Agora vamos resolver mais alguns exercícios na lógica minimal.

Exemplo 14. Considere o sequente $\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi$. Como a fórmula do conseqüente é uma negação, vamos aplicar a regra de introdução da negação na construção de uma prova de baixo para cima, isto é, da raiz para as folhas da árvore:

$$\frac{?}{\frac{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \varphi \vdash \perp}{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi} (\neg_i)}$$

Agora, precisamos construir uma prova do absurdo, e portanto podemos tentar utilizar a regra $(\neg_e)$. Para isto precisamos escolher uma fórmula do contexto para fazer o papel de φ da regra 8 da Tabela 2.1. A princípio temos três opções: $\varphi \rightarrow \psi$, $\neg\psi$ e φ . A boa escolha neste caso é $\neg\psi$ porque podemos facilmente provar ψ a partir deste contexto:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\overline{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \varphi \vdash \varphi \rightarrow \psi} \text{ (Ax)}}{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \varphi \vdash \varphi \rightarrow \psi} \text{ (Ax)} \quad \frac{\overline{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \varphi \vdash \varphi} \text{ (Ax)}}{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \varphi \vdash \varphi} \text{ (Ax)}}{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \varphi \vdash \psi} \text{ (}\rightarrow_e\text{)} \quad \frac{\overline{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \varphi \vdash \neg\psi} \text{ (Ax)}}{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \varphi \vdash \neg\psi} \text{ (Ax)}}{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \varphi \vdash \perp} \text{ (}\neg_e\text{)} \\
 \frac{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \varphi \vdash \perp}{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi} (\neg_i)
 \end{array}$$

Depois de concluída a prova é fácil entender o que queríamos dizer com boa escolha acima: Uma boa escolha é um caminho que vai nos permitir concluir uma prova. Mas como fazer uma boa escolha? Isto depende do problema a ser resolvido. Em alguns casos pode ser simples, mas em outros, bastante complicado. O ponto importante a compreender é que existem caminhos possíveis distintos na construção de provas da lógica proposicional, e muito deste processo depende da nossa criatividade.

O sequente que acabamos de provar ocorre com certa frequência em outras provas, assim como a regra derivada ($\neg\neg_i$). As regras que são obtidas a partir das regras da Tabela 2.1 são chamadas de *regras derivadas*. Este é o caso da regra conhecida como *modus tollens* (MT) obtida a partir do sequente do exemplo anterior, onde cada antecedente é generalizado como uma premissa da regra:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \neg\psi}{\Gamma \vdash \neg\varphi} \text{ (MT)}$$

Exemplo 15. Considere o sequente $\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$. Inicialmente, devemos observar que a fórmula que queremos provar é uma implicação, e portanto, o mais natural é tentar aplicar a regra ($\rightarrow_i$), e em seguida aplicar (MT) (na construção de baixo para cima) para poder completar a prova:

$$\frac{\begin{array}{c} \text{(Ax)} \frac{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \vdash \varphi \rightarrow \psi} \quad \frac{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \vdash \neg\psi}{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \vdash \neg\psi} \text{ (Ax)} \\ \text{(MT)} \\ \varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi \\ \text{(\rightarrow}_i\text{)} \\ \varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi \end{array}}$$

O sequente que acabamos de provar é outro caso que aparece com frequência em provas, e corresponde a uma regra conhecida como *contrapositiva*:

$$\Rightarrow \frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi} \text{ (CP)}$$

Este é um bom momento para simplificarmos a notação que estamos usando, e tentaremos deixar clara a vantagem de nossa abordagem com a mudança de notação neste momento. Vamos retomar o Exercício 11 que consiste em provar que a conjunção é um conectivo que satisfaz a propriedade associativa. Neste ponto acreditamos que você já resolveu este exercício. Em caso negativo, resolva o exercício antes de prosseguir. Em seguida, compare sua solução com a que apresentamos a seguir, ok? Tentar resolver os exercícios antes de olhar qualquer solução é um passo muito importante para a sua evolução nos estudos de lógica. Considere a prova a seguir:

Observe que o contexto, isto é, o antecedente de cada um dos sequentes desta prova é o mesmo. De fato, o contexto em cada nó da árvore acima é o conjunto unitário contendo a fórmula $(\phi \wedge \psi) \wedge \varphi$. Como o que muda ao longo da prova é o conseqüente dos sequentes, é natural considerar que o foco, ou que a parte principal, desta prova é o conseqüente de cada sequente. Sabendo com qual contexto estamos trabalhando, podemos removê-lo da prova deixando-a mais limpa e compacta. Veja como fica a prova sem os contextos:

$$(\phi \wedge \psi) \wedge \varphi \vdash \phi \wedge (\psi \wedge \varphi)$$

Será que é possível sempre remover os contextos das provas de uma forma sistemática? Sim, e neste exemplo em particular, a situação é simples porque o contexto é o mesmo em toda a prova, mas este não será o caso em geral. Ainda considerando o exemplo anterior, se não soubéssemos qual o contexto que foi apagado, seria possível descobri-lo? Sim, esta informação vem das folhas da árvore, que são as hipóteses do problema. Na notação com o contexto explícito, as folhas da árvore têm que ser axiomas, e portanto o contexto de todas as folhas é a fórmula $(\phi \wedge \psi) \wedge \varphi$ já que todas as folhas são iguais. Agora podemos consultar a Tabela 2.1 e observar que os contextos das regras $(\wedge_e)$ e $(\wedge_i)$ são os mesmos antes e depois da aplicação destas regras. Portanto, o contexto em cada nó da árvore é formado pelo conjunto unitário contendo a fórmula $(\phi \wedge \psi) \wedge \varphi$. Outro detalhe importante é que as folhas desta nova árvore não correspondem mais à regra (Ax) , e portanto as folhas têm que ser fórmulas pertencentes ao contexto. As apresentações do sistema de dedução natural normalmente utilizam contextos implícitos [18, 12, 35, 4].

No Exemplo 14 construímos uma prova do sequente $\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi$ com contextos explícitos, a versão com contextos implícitos é dada pela seguinte árvore de derivação:

$$\Pi = \{ \varphi \rightarrow \psi, \underbrace{\varphi, \neg\psi}_{\downarrow} \} \quad \left\{ \begin{array}{l} (\rightarrow_e) \frac{\varphi \rightarrow \psi \quad [\varphi]^*}{\psi} \quad \neg\psi \quad (\neg_e) \\ \hline \perp \quad (\neg_i)^* \\ \hline \neg\varphi \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi \\ \varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \end{array} \right.$$

Note que esta árvore possui três folhas, cada uma contendo uma fórmula distinta. O contexto inicial é o conjunto contendo todas as fórmulas que aparecem nas folhas, ou seja, nosso contexto inicial é o conjunto $\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \varphi\}$. As regras $(\rightarrow_e)$ e $(\neg_e)$ preservam o contexto, e portanto o contexto da linha 3 é o conjunto $\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \varphi\}$. De acordo com a Tabela 2.1, a regra $(\neg_i)$ adiciona uma fórmula ao contexto (leitura de baixo para cima), ou remove uma fórmula do contexto, se a leitura for feita de cima para baixo. Neste caso, a fórmula removida é φ , e portanto o contexto da fórmula $\neg\varphi$ (raiz da árvore) é o conjunto $\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi\}$ como esperado. Na notação sem contexto, as fórmulas que são removidas do contexto ao longo da prova, como a fórmula φ deste exemplo são colocadas entre colchetes para enfatizar que são hipóteses temporárias que em determinado momento serão removidas do contexto:

$$(\rightarrow_e) \frac{\varphi \rightarrow \psi \quad [\varphi]}{\psi} \quad \neg\psi \quad (\neg_e) \\ \hline \perp \quad (\neg_i) \\ \hline \neg\varphi$$

e agora fica claro que a fórmula φ não faz parte do contexto original do sequente a ser provado. Note que os colchetes são colocados **apenas nas folhas** que contêm fórmulas que não fazem parte do contexto dado pelo problema. Adicionalmente, como o contexto da raiz tem que ser o contexto dado pelo problema, caso contrário a prova não é uma prova do problema proposto, precisamos de um mecanismo para nos informar quando as fórmulas marcadas com os colchetes **são removidas** (ou **descartadas**) do contexto. No exemplo acima, isto ocorre ao aplicarmos a regra $(\neg_i)$. Então, utilizaremos uma letra para registrar este fato:

$$(\rightarrow_e) \frac{\varphi \rightarrow \psi \quad [\varphi]^u}{\psi} \quad \neg\psi \quad (\neg_e) \\ \hline \perp \quad (\neg_i)^u \\ \hline \neg\varphi$$

Agora sabemos em que momento a fórmula φ foi introduzida (folha $[\varphi]^u$), e em que momento foi descartada (regra $(\neg_i)^u$) na árvore de derivação.

A seguir, veremos exemplos mais complexos onde fórmulas idênticas podem exigir marcas distintas, mas antes disto compare as regras de dedução natural para a lógica proposicional minimal com o contexto explícito e com o contexto implícito na Tabela 2.2, e veja como o mecanismo de descarte simula a mudança de contexto antes e depois de uma aplicação das regras $(\vee_e)$, $(\rightarrow_i)$ e $(\neg_i)$. Como a notação com contexto implícito é mais compacta, a partir deste momento não utilizaremos mais contextos explícitos. A intenção

	Contexto explícito	Contexto implícito
1	$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \quad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2} (\wedge_i)$	$\frac{\varphi_1 \quad \varphi_2}{\varphi_1 \wedge \varphi_2} (\wedge_i)$
2	$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}} (\wedge_e)$	$\frac{\varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi_{i \in \{1,2\}}} (\wedge_e)$
3	$\frac{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} (\vee_i)$	$\frac{\varphi_{i \in \{1,2\}}}{\varphi_1 \vee \varphi_2} (\vee_i)$
4	$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \Gamma' \vdash \varphi_1 \vdash \gamma \quad \Gamma'' \vdash \varphi_2 \vdash \gamma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \gamma} (\vee_e)$	$\frac{[\varphi_1]^u \quad \vdots \quad \gamma \quad [\varphi_2]^v \quad \vdots \quad \gamma}{\varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \gamma \quad \gamma} (\vee_e) u, v$
5	$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i)$	$\frac{[\varphi]^u \quad \vdots \quad \psi}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i) u$
6	$\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi} (\rightarrow_e)$	$\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \varphi}{\psi} (\rightarrow_e)$
7	$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \varphi} (\neg_i)$	$\frac{[\varphi]^u \quad \vdots \quad \perp}{\neg \varphi} (\neg_i) u$
8	$\frac{\Gamma \vdash \neg \varphi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \perp} (\neg_e)$	$\frac{\neg \varphi \quad \varphi}{\perp} (\neg_e)$

Tabela 2.2: Regras da Lógica Proposicional Minimal

de iniciar esta apresentação utilizando contextos explícitos foi de permitir uma explicação mais fácil e natural para o descarte de hipóteses, que sempre gerou muitas dúvidas entre os alunos. Por exemplo, se a razão do descarte não está clara, é comum aparecerem árvores de derivação com descarte de hipóteses feito em regras como $(\wedge_i)$, $(\wedge_e)$, $(\vee_i)$, $(\rightarrow_e)$ e $(\neg_e)$. Se você acha que está tudo bem uma árvore de derivação conter descarte de hipóteses nas regras citadas na frase anterior, volte para o início deste capítulo e reinicie o estudo do sistema de dedução natural antes de prosseguir :-)

Exemplo 16. Neste exemplo, veremos que é possível fazer a introdução de uma implicação sem precisar descartar uma hipótese, se tivermos uma prova do conseqüente da implicação que queremos construir. Ou seja, se temos uma prova de ψ então podemos construir uma prova de $\varphi \rightarrow \psi$, qualquer que seja a fórmula φ . Em outras palavras, queremos construir uma prova para o seqüente $\psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$. A ideia da prova neste caso é simples. Vamos assumir uma prova de φ , e transformá-la em uma prova de ψ que já temos como hipótese. Para isto basta introduzirmos e em seguida eliminarmos uma conjunção contendo ψ :

$$\frac{\frac{[\varphi]^u \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} (\wedge_i)}{\psi} (\wedge_e) \quad \frac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i) u$$

Como este raciocínio aparece com frequência nas provas, vamos colocá-lo como uma regra derivada:

$$\frac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i) \emptyset$$

Exercício 17. Sejam φ e γ fórmulas da lógica proposicional. Construa uma prova para o seqüente $\varphi, \neg \varphi \vdash \neg \gamma$ na lógica proposicional minimal.

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi} (\neg\neg_i) & \frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \neg\psi}{\Gamma \vdash \neg\varphi} (\text{MT}) & \frac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i) \emptyset \\ \hline \end{array}}$$

Tabela 2.3: Regras derivadas da Lógica Proposicional Minimal

Exercício 18. *Sejam φ e ψ fórmulas da lógica proposicional. Construa uma prova para o sequente $\neg(\varphi \vee \psi) \vdash (\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$ na lógica proposicional minimal.*

Exercício 19. *Sejam φ e ψ fórmulas da lógica proposicional. Construa uma prova para o sequente $(\neg\varphi) \wedge (\neg\psi) \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$ na lógica proposicional minimal.*

Exercício 20. *Sejam φ, ψ e δ fórmulas da lógica proposicional. Construa uma prova para o sequente $\varphi \rightarrow \psi \vdash (\delta \vee \varphi) \rightarrow (\delta \vee \psi)$ na lógica proposicional minimal.*

Exercício 21. *Sejam φ e γ fórmulas da lógica proposicional. Construa uma prova para os sequentes $\neg(\varphi \vee \gamma) \vdash (\neg\varphi) \wedge (\neg\gamma)$ e $(\neg\varphi) \wedge (\neg\gamma) \vdash \neg(\varphi \vee \gamma)$ na lógica proposicional minimal.*

Exercício 22. *Sejam φ e γ fórmulas da lógica proposicional. Construa uma prova para o sequente $(\neg\varphi) \vee (\neg\gamma) \vdash \neg(\varphi \wedge \gamma)$ na lógica proposicional minimal.*

Exercício 23. *Sejam φ e γ fórmulas da lógica proposicional. Construa uma prova para o sequente $\neg\neg(\varphi \wedge \gamma) \vdash (\neg\neg\varphi) \wedge (\neg\neg\gamma)$ na lógica proposicional minimal.*

Exercício 24. *Sejam φ e γ fórmulas da lógica proposicional. Construa uma prova para o sequente $(\neg\neg\varphi) \wedge (\neg\neg\gamma) \vdash \neg\neg(\varphi \wedge \gamma)$ na lógica proposicional minimal.*

Exercício 25. *Sejam φ, ψ e γ fórmulas da lógica proposicional. Prove o sequente $\varphi \vee (\psi \wedge \gamma) \vdash (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \gamma)$.*

Exercício 26. *Sejam φ, ψ e γ fórmulas da lógica proposicional. Prove o sequente $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \gamma) \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \gamma)$.*

Exercício 27. *Sejam φ, ψ e γ fórmulas da lógica proposicional. Prove o sequente $\varphi \wedge (\psi \vee \gamma) \vdash (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \gamma)$.*

Exercício 28. *Sejam φ, ψ e γ fórmulas da lógica proposicional. Prove o sequente $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \gamma) \vdash \varphi \wedge (\psi \vee \gamma)$.*

Exercício 29. *Seja φ uma fórmula da lógica proposicional. Prove o sequente $\vdash \neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ na lógica proposicional minimal.*

2.1 O Assistente de provas Coq

1. Notação

Utilizaremos algumas notações para facilitar a identificação de diferentes contextos, principalmente no que se refere ao assistente de provas Coq[34]. Os códigos do Coq são escritos em *verbatim*, mas uma sessão típica do Coq possui três janelas: