Agora não é mais possível utilizar a regra $(\to_i)$ porque a conclusão r não é uma implicação, mas podemos utilizar a hipótese $q \to r$ para obter r, desde que tenhamos q para utilizarmos $(\to_e)$. Mas podemos obter q por meio da regra $(\to_e)$ com as hipóteses $p \to q$ e p. A prova completa é dada a seguir:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$p \to q, q \to r, p \vdash p$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$p \to q, q \to r, p \vdash p \to q$}
\RightLabel{$(\to_e)$}
\BinaryInfC{$p \to q, q \to r, p \vdash q$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$p \to q, q \to r, p \vdash q \to r$}
\RightLabel{$(\to_e)$}
\BinaryInfC{$p \to q, q \to r, p \vdash r$}
\RightLabel{$(\to_i)$}
\UnaryInfC{$p \to q, q \to r \vdash p \to r$}
\RightLabel{$(\to_i)$}
\UnaryInfC{$p \to q \vdash (q \to r) \to (p \to r)$}
\RightLabel{$(\to_i)$}
\UnaryInfC{$\vdash (p \to q) \to (q \to r) \to (p \to r)$}
\end{prooftree}
$$

Exercício 1. *Prove o sequente* $\vdash (p \to p \to q) \to p \to q$.

Exercício 2. *Prove o sequente* $\vdash (p \to q) \to (p \to p \to q)$.

Exercício 3. *Prove o sequente* $\vdash (q \to r \to t) \to (p \to q) \to p \to r \to t$.

Exercício 4. *Prove o sequente* $\vdash (p \to q \to r) \to (p \to q) \to p \to r$.

Exercício 5. *Prove o sequente* $\vdash (p \to q \to r) \to (q \to p \to r)$.

Exercício 6. *Prove o sequente* $\vdash (p \to r) \to p \to q \to r$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash p \to r$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash p$}
\RightLabel{$(\to e)$}
\BinaryInfC{$\Gamma = \{p \to r, p, q\} \vdash r$}
\RightLabel{$(\to i)$}
\UnaryInfC{$p \to r, p \vdash q \to r$}
\RightLabel{$(\to i)$}
\UnaryInfC{$p \to r \vdash p \to q \to r$}
\RightLabel{$(\to i)$}
\UnaryInfC{$\vdash (p \to r) \to (p \to (q \to r))$}
\end{prooftree}
$$

Exercício 7. *Prove o sequente* $\vdash (p \to q) \to (p \to r) \to (q \to r \to t) \to p \to t$.

Exercício 8. *Prove o sequente* $\vdash ((((p \to q) \to p) \to p) \to q) \to q$.

As regras para a negação são muito similares às regras da implicação, e isto não ocorre por acaso. De fato, uma negação é uma implicação particular porque $\neg\varphi$ é definida como $\varphi \to \bot$. Considerando este fato, a analogia com as regras da implicação é direta.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma, \varphi \vdash \bot$}
\RightLabel{$(\to i)$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \varphi \to \bot$}
\end{prooftree}
\qquad
\boxed{
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma, \varphi \vdash \bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \neg\varphi$}
\end{prooftree}
}
\qquad
\boxed{
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma \vdash \neg\varphi$}
\AxiomC{$\Gamma \vdash \varphi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash \bot$}
\end{prooftree}
}
\qquad
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma \vdash \varphi \to \bot$}
\AxiomC{$\Gamma \vdash \varphi$}
\RightLabel{$(\to e)$}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash \bot$}
\end{prooftree}
$$

Veremos posteriormente que apenas com a negação e implicação podemos expressar todos os outros conectivos apresentados na gramática (2.1), que portanto é uma gramática redundante. No entanto, esta redundância é interessante porque nos permite expressar fórmulas complexas de forma compacta.

Exercício 9. *Seja* φ *uma fórmula da lógica proposicional. Prove o sequente* $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$.

O sequente do exercício anterior ocorre com alta frequência em provas, e pelo seu caráter especial, ele será promovido ao *status* de regra derivada. Nesta transformação, os antecedentes do sequente, neste caso a fórmula φ, são generalizados como premissas da regra de inferência:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\LeftLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$\varphi, \neg\varphi \vdash \varphi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi$}
\RightLabel{$(\neg e)$}
\BinaryInfC{$\varphi, \neg\varphi \vdash \bot$}
\RightLabel{$(\neg i)$}
\UnaryInfC{$\varphi \vdash \neg(\neg\varphi)$}
\end{prooftree}
$$

$$\boxed{\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}\,(\neg\neg_i)}$$

regra derivada.

Talvez você esteja esperando agora a derivação da eliminação da dupla negação para se juntar a regra anterior, mas infelizmente isto não é possível neste momento porque o poder de expressividade que temos até agora com as regras $(\to_e)$, $(\to_{\mathrm{i}})$, $(\neg_{\mathrm{i}})$ e $(\neg_e)$ não é suficiente para provarmos a eliminação da dupla negação. Mas para deixá-lo intrigado provaremos o seguinte sequente: $\boxed{\neg\neg\neg\varphi \vdash \neg\varphi.}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg\neg\varphi, \varphi \vdash \varphi}\,(\mathrm{Ax})}{\neg\neg\neg\varphi, \varphi \vdash \neg\neg\varphi}\,(\neg\neg_i) \qquad \dfrac{}{\neg\neg\neg\varphi, \varphi \vdash \neg\neg\neg\varphi}\,(\mathrm{Ax})}{\dfrac{\neg\neg\neg\varphi, \varphi \vdash \bot}{\neg\neg\neg\varphi \vdash \neg\varphi}\,(\neg_i)}\,(\neg_e)$$

O sequente anterior é a prova da eliminação da dupla negação de uma **fórmula negada**, e isto faz toda a diferença. Voltaremos a falar da eliminação da dupla negação na seção sobre lógica proposicional clássica.

Exercício 10. *Sejam φ e ψ fórmulas da lógica proposicional. Prove o sequente* $\neg\neg(\varphi \to \psi) \vdash (\neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\psi)$

A *regra de introdução da conjunção*, denotada por $(\wedge_i)$, nos diz o que precisamos fazer para construir uma prova de um sequente que possui uma conjunção na conclusão, isto é, um sequente da forma $\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$, onde Γ é um conjunto finito de fórmulas da LP, e φ_1 e φ_2 são fórmulas da LP. A regra $(\wedge_i)$ é dada pela seguinte regra de inferência:

$$\boxed{\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \qquad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}\,(\wedge_i)} \tag{2.2}$$

ou seja, uma prova de $\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$ é construída a partir de uma prova de $\Gamma \vdash \varphi_1$ e de uma prova de $\Gamma \vdash \varphi_2$.

Existem duas regras de eliminação para a conjunção já que podemos extrair qualquer uma das componentes de uma conjunção:

$$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1}\,(\wedge_{e_1}) \qquad\qquad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_2}\,(\wedge_{e_2})$$

Estas duas regras podem ser representadas de forma mais concisa da seguinte forma:

$$\boxed{\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}}\,(\wedge_e)} \tag{2.3}$$

Usaremos o nome $(\wedge_e)$ para designar a utilização da regra de eliminação da conjunção quando não quisermos especificar qual das regras $(\wedge_{e_1})$ ou $(\wedge_{e_2})$ foi utilizada.

Com as regras da conjunção já podemos fazer um exercício interessante: provar a comutatividade da conjunção, isto é, queremos construir uma prova para o sequente $\varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi$, onde φ e ψ são fórmulas quaisquer da LP. A construção da prova é feita inicialmente de baixo para cima com a aplicação da regra $(\wedge_i)$:

$$\dfrac{\dfrac{?}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi} \qquad \dfrac{?}{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi}}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi}\ (\wedge_i)$$

Concluímos com a regra de eliminação da conjunção e o axioma:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi \wedge \psi}\ (\mathrm{Ax})}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi}\ (\wedge_e) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi \wedge \psi}\ (\mathrm{Ax})}{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi}\ (\wedge_e)}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi}\ (\wedge_i)$$

Exercício 11. *Prove que a conjunção é associativa, isto é, prove o sequente $(\varphi \wedge \psi) \wedge \rho \vdash \varphi \wedge (\psi \wedge \rho)$, onde φ, ψ e ρ são fórmulas quaisquer da lógica proposicional.*

Vejamos agora as regras para a disjunção. A *regra de introdução da disjunção* nos permite construir a prova de uma disjunção a partir da prova de qualquer uma das suas componentes:

$$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}\ (\vee_{i_1}) \qquad\qquad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}\ (\vee_{i_2})$$

Como no caso da regra de eliminação da conjunção podemos representar estas duas regras de forma mais compacta:

$$\boxed{\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}\ (\vee_i)}$$

A *regra de eliminação da disjunção* nos permite construir a prova de uma fórmula, digamos γ, a partir de uma disjunção. Para isto, precisamos de duas provas distintas de γ, cada uma assumindo uma das componentes da disjunção separadamente:

$$\boxed{\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \qquad \Gamma, \varphi_1 \vdash \gamma \qquad \Gamma, \varphi_2 \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \gamma}\ (\vee_\mathrm{e})}$$

Assim, para que tenhamos uma prova de γ a partir das fórmulas em Γ (sequente $\Gamma \vdash \gamma$) precisamos de uma prova de γ a partir de φ_1 e das fórmulas de Γ (sequente $\Gamma, \varphi_1 \vdash \gamma$) e de outra prova de γ a partir de φ_2 e das fórmulas de Γ (sequente $\Gamma, \varphi_2 \vdash \gamma$). Observe como os contextos mudam em cada um dos sequentes que compõem esta regra.

Exemplo 12. *Vamos mostrar que a disjunção é comutativa, ou seja, queremos construir uma prova para o sequente $\varphi \vee \psi \vdash \psi \vee \varphi$. A ideia aqui é utilizarmos a regra $(\vee_\mathrm{e})$. Para isto podemos instanciar Γ com o conjunto unitário contendo a fórmula $\varphi \vee \psi$. Em função da estrutura da regra $(\vee_\mathrm{e})$, precisamos construir duas provas distintas de $\psi \vee \varphi$: uma a partir de φ, e outra a partir de ψ. Podemos fazer isto*

	Regras de introdução	Regras de eliminação
1	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \qquad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}\,(\wedge_i)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_{i\in\{1,2\}}}\,(\wedge_e)$
2	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_{i\in\{1,2\}}}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}\,(\vee_i)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \qquad \Gamma', \varphi_1 \vdash \gamma \qquad \Gamma'', \varphi_2 \vdash \gamma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \gamma}\,(\vee_{\mathrm{e}})$
3	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\,(\to_i)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\,(\to_e)$
4	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\,(\neg_i)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\varphi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \bot}\,(\neg_e)$

Tabela 2.1: Regras da Lógica Minimal

com a ajuda da regra $(\vee_i)$*:*

$$\dfrac{(\mathrm{Ax})\,\dfrac{}{\varphi \vee \psi \vdash \varphi \vee \psi} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\,(\mathrm{Ax})}{\varphi \vdash \psi \vee \varphi}\,(\vee_i) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\psi \vdash \psi}\,(\mathrm{Ax})}{\psi \vdash \psi \vee \varphi}\,(\vee_i)}{\varphi \vee \psi \vdash \psi \vee \varphi}\,(\vee_{\mathrm{e}})$$

Exercício 13. *Sejam φ, ψ e ρ fórmulas quaisquer da lógica proposicional. Prove que a disjunção é associativa, isto é, prove o sequente $(\varphi \vee \psi) \vee \rho \vdash \varphi \vee (\psi \vee \rho)$.*

A Tabela 2.1 apresenta as regras vistas até aqui. Estas regras formam a chamada *lógica proposicional minimal*.

Agora vamos resolver mais alguns exercícios na lógica minimal.

Exemplo 14. *Considere o sequente $\varphi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi$. Como a fórmula do consequente é uma negação, vamos aplicar a regra de introdução da negação na construção de uma prova de baixo para cima, isto é, da raiz para as folhas da árvore:*

$$\dfrac{\dfrac{?}{\varphi \to \psi, \neg\psi, \varphi \vdash \bot}}{\varphi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi}\,(\neg_{\mathrm{i}})$$

Agora, precisamos construir uma prova do absurdo, e portanto podemos tentar utilizar a regra $(\neg_e)$. Para isto precisamos escolher uma fórmula do contexto para fazer o papel de φ da regra 8 da Tabela 2.1. A princípio temos três opções: $\varphi \to \psi$, $\neg\psi$ e φ. A boa escolha neste caso é $\neg\psi$ porque podemos facilmente provar ψ a partir deste contexto:

$$\dfrac{\dfrac{(\to_e)\,\dfrac{\dfrac{}{\varphi \to \psi, \neg\psi, \varphi \vdash \varphi \to \psi}\,(\mathrm{Ax}) \qquad \dfrac{}{\varphi \to \psi, \neg\psi, \varphi \vdash \varphi}\,(\mathrm{Ax})}{\varphi \to \psi, \neg\psi, \varphi \vdash \psi} \qquad \dfrac{}{\varphi \to \psi, \neg\psi, \varphi \vdash \neg\psi}\,(\mathrm{Ax})}{\varphi \to \psi, \neg\psi, \varphi \vdash \bot}\,(\neg_e)}{\varphi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi}\,(\neg_{\mathrm{i}})$$

Depois de concluída a prova é fácil entender o que queríamos dizer com boa escolha *acima: Uma boa escolha é um caminho que vai nos permitir concluir uma prova. Mas como fazer uma boa escolha? Isto depende do problema a ser resolvido. Em alguns casos pode ser simples, mas em outros, bastante complicado. O ponto importante a compreender é que existem caminhos possíveis distintos na construção de provas da lógica proposicional, e muito deste processo depende da nossa criatividade.*

O sequente que acabamos de provar ocorre com certa frequência em outras provas, assim como a regra derivada $(\neg\neg_i)$. As regras que são obtidas a partir das regras da Tabela 2.1 são chamadas de *regras derivadas*. Este é o caso da regra conhecida como *modus tollens* (MT) obtida a partir do sequente do exemplo anterior, onde cada antecedente é generalizado como uma premissa da regra:

$$\boxed{\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash \neg\psi}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\ (\mathrm{MT})}$$

Exemplo 15. *Considere o sequente* $\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$. *Inicialmente, devemos observar que a fórmula que queremos provar é uma implicação, e portanto, o mais natural é tentar aplicar a regra* $(\to_{\mathrm{i}})$, *e em seguida aplicar* (MT) *(na construção de baixo para cima) para poder completar a prova:*

$$\dfrac{\dfrac{(\mathrm{Ax})\,\dfrac{}{\varphi \to \psi, \neg\psi \vdash \varphi \to \psi} \qquad \dfrac{}{\varphi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\psi}\,(\mathrm{Ax})}{\varphi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi}\,(\mathrm{MT})}{\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi}\,(\to_{\mathrm{i}})$$

O sequente que acabamos de provar é outro caso que aparece com frequência em provas, e corresponde a uma regra conhecida como *contrapositiva*:

$$\boxed{\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}{\Gamma \vdash \neg\psi \to \neg\varphi}\ (\mathrm{CP})}$$

Este é um bom momento para simplificarmos a notação que estamos usando, e tentaremos deixar clara a vantagem de nossa abordagem com a mudança de notação neste momento. Vamos retomar o Exercício 11 que consiste em provar que a conjunção é um conectivo que satisfaz a propriedade associativa. Neste ponto acreditamos que você já resolveu este exercício. Em caso negativo, resolva o exercício antes de prosseguir. Em seguida, compare sua solução com a que apresentamos a seguir, ok? Tentar resolver os exercícios antes de olhar qualquer solução é um passo muito importante para a sua evolução nos estudos de lógica. Considere a prova a seguir:

$$\dfrac{(\wedge_e)\,\dfrac{(\wedge_e)\,\dfrac{(\mathrm{Ax})\,\dfrac{}{(\phi\wedge\psi)\wedge\varphi \vdash (\phi\wedge\psi)\wedge\varphi}}{(\phi\wedge\psi)\wedge\varphi \vdash \phi\wedge\psi}}{(\phi\wedge\psi)\wedge\varphi \vdash \phi} \qquad \dfrac{(\wedge_e)\,\dfrac{(\wedge_e)\,\dfrac{(\mathrm{Ax})\,\dfrac{}{(\phi\wedge\psi)\wedge\varphi \vdash (\phi\wedge\psi)\wedge\varphi}}{(\phi\wedge\psi)\wedge\varphi \vdash \phi\wedge\psi}}{(\phi\wedge\psi)\wedge\varphi \vdash \psi} \quad \dfrac{\dfrac{}{(\phi\wedge\psi)\wedge\varphi \vdash (\phi\wedge\psi)\wedge\varphi}\,(\mathrm{Ax})}{(\phi\wedge\psi)\wedge\varphi \vdash \varphi}\,(\wedge_e)}{(\phi\wedge\psi)\wedge\varphi \vdash (\psi\wedge\varphi)}\,(\wedge_i)}{(\phi\wedge\psi)\wedge\varphi \vdash \phi\wedge(\psi\wedge\varphi)}\,(\wedge_i)$$

Observe que o contexto, isto é, o antecedente de cada um dos sequentes desta prova é o mesmo. De fato, o contexto em cada nó da árvore acima é o conjunto unitário contendo a fórmula $(\phi\wedge\psi)\wedge\varphi$. Como o que muda ao longo da prova é o consequente dos sequentes, é natural considerar que o foco, ou que a parte principal, desta prova é o consequente de cada sequente. Sabendo com qual contexto estamos trabalhando, podemos removê-lo da prova deixando-a mais limpa e compacta. Veja como fica a prova sem os contextos:

$$\dfrac{(\wedge_e)\,\dfrac{(\wedge_e)\,\dfrac{(\phi\wedge\psi)\wedge\varphi}{(\phi\wedge\psi)}}{\phi} \qquad \dfrac{(\wedge_e)\,\dfrac{(\wedge_e)\,\dfrac{(\phi\wedge\psi)\wedge\varphi}{\phi\wedge\psi}}{\psi} \quad \dfrac{(\phi\wedge\psi)\wedge\varphi}{\varphi}\,(\wedge_e)}{(\psi\wedge\varphi)}\,(\wedge_i)}{\phi\wedge(\psi\wedge\varphi)}\,(\wedge_i)$$

$(\phi\wedge\psi)\wedge\varphi \vdash \phi\wedge(\psi\wedge\varphi)$

Será que é possível sempre remover os contextos das provas de uma forma sistemática? Sim, e neste exemplo em particular, a situação é simples porque o contexto é o mesmo em toda a prova, mas este não será o caso em geral. Ainda considerando o exemplo anterior, se não soubéssemos qual o contexto que foi apagado, seria possível descobrí-lo? Sim, esta informação vem das folhas da árvore, que são as hipóteses do problema. Na notação com o contexto explícito, as folhas da árvore têm que ser axiomas, e portanto o contexto de todas as folhas é a fórmula $(\phi \wedge \psi) \wedge \varphi$ já que todas as folhas são iguais. Agora podemos consultar a Tabela 2.1 e observar que os contextos das regras $(\wedge_e)$ e $(\wedge_i)$ são os mesmos antes e depois da aplicação destas regras. Portanto, o contexto em cada nó da árvore é formado pelo conjunto unitário contendo a fórmula $(\phi \wedge \psi) \wedge \varphi$. Outro detalhe importante é que as folhas desta nova árvore não correspondem mais à regra (Ax), e portanto as folhas têm que ser fórmulas pertencentes ao contexto. As apresentações do sistema de dedução natural normalmente utilizam contextos implícitos [18, 12, 35, 4].

No Exemplo 14 construímos uma prova do sequente $\boxed{\varphi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi}$ com contextos explícitos, a versão com contextos implícitos é dada pela seguinte árvore de derivação:

$\Pi = \{\varphi \to \psi, \varphi, \neg\psi\}$

$\Pi \vdash \neg\varphi$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \to \psi \qquad [\varphi]}{\psi}\,(\to_e) \qquad \neg\psi}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\varphi}\,(\neg_{\mathrm{i}})$$

$\varphi, \varphi \to \psi, \neg\psi$

$\varphi \to \psi, \neg\psi$

Note que esta árvore possui três folhas, cada uma contendo uma fórmula distinta. O contexto inicial é o conjunto contendo todas as fórmulas que aparecem nas folhas, ou seja, nosso contexto inicial é o conjunto $\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \varphi\}$. As regras $(\to_e)$ e $(\neg_e)$ preservam o contexto, e portanto o contexto da linha 3 é o conjunto $\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \varphi\}$. De acordo com a Tabela 2.1, a regra $(\neg_{\mathrm{i}})$ adiciona uma fórmula ao contexto (leitura de baixo para cima), ou remove uma fórmula do contexto, se a leitura for feita de cima para baixo. Neste caso, a fórmula removida é φ, e portanto o contexto da fórmula $\neg\varphi$ (raiz da árvore) é o conjunto $\{\varphi \to \psi, \neg\psi\}$ como esperado. Na notação sem contexto, as fórmulas que são removidas do contexto ao longo da prova, como a fórmula φ deste exemplo são colocadas entre colchetes para enfatizar que são hipóteses temporárias que em determinado momento serão removidas do contexto:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \to \psi \qquad [\varphi]}{\psi}\,(\to_e) \qquad \neg\psi}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\varphi}\,(\neg_{\mathrm{i}})$$

e agora fica claro que a fórmula φ não faz parte do contexto original do sequente a ser provado. Note que os colchetes são colocados **apenas nas folhas** que contêm fórmulas que não fazem parte do contexto dado pelo problema. Adicionalmente, como o contexto da raiz tem que ser o contexto dado pelo problema, caso contrário a prova não é uma prova do problema proposto, precisamos de um mecanismo para nos informar quando as fórmulas marcadas com os colchetes são **removidas** (ou **descartadas**) do contexto. No exemplo acima, isto ocorre ao aplicarmos a regra $(\neg_{\mathrm{i}})$. Então, utilizaremos uma letra para registrar este fato:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \to \psi \qquad [\varphi]^u}{\psi}\,(\to_e) \qquad \neg\psi}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\varphi}\,(\neg_i)\ u$$

Agora sabemos em que momento a fórmula φ foi introduzida (folha $[\varphi]^u$), e em que momento foi descartada (regra $(\neg_i)$ u) na árvore de derivação.

A seguir, veremos exemplos mais complexos onde fórmulas idênticas podem exigir marcas distintas, mas antes disto compare as regras de dedução natural para a lógica proposicional minimal com o contexto explícito e com o contexto implícito na Tabela 2.2, e veja como o mecanismo de descarte simula a mudança de contexto antes e depois de uma aplicação das regras $(\vee_{\mathrm{e}})$, $(\to_{\mathrm{i}})$ e $(\neg_{\mathrm{i}})$. Como a notação com contexto implícito é mais compacta, a partir deste momento não utilizaremos mais contextos explícitos. A intenção

	Contexto explícito	Contexto implícito
1	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \quad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}\,(\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi_1 \quad \varphi_2}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\,(\wedge_i)$
2	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_{i\in\{1,2\}}}\,(\wedge_e)$	$\dfrac{\varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi_{i\in\{1,2\}}}\,(\wedge_e)$
3	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_{i\in\{1,2\}}}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}\,(\vee_i)$	$\dfrac{\varphi_{i\in\{1,2\}}}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\,(\vee_i)$
4	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \Gamma', \varphi_1 \vdash \gamma \quad \Gamma'', \varphi_2 \vdash \gamma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \gamma}\,(\vee_e)$	$\dfrac{\varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \begin{matrix}[\varphi_1]^u \\ \vdots \\ \gamma\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\varphi_2]^v \\ \vdots \\ \gamma\end{matrix}}{\gamma}\,(\vee_e)\; u, v$
5	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\,(\to_i)$	$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}\,(\to_i)\; u$
6	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\,(\to_e)$	$\dfrac{\varphi \to \psi \quad \varphi}{\psi}\,(\to_e)$
7	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\,(\neg_i)$	$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi}\,(\neg_i)\; u$
8	$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\varphi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \bot}\,(\neg_e)$	$\dfrac{\neg\varphi \quad \varphi}{\bot}\,(\neg_e)$

Tabela 2.2: Regras da Lógica Proposicional Minimal

de iniciar esta apresentação utilizando contextos explícitos foi de permitir uma explicação mais fácil e natural para o descarte de hipóteses, que sempre gerou muitas dúvidas entre os alunos. Por exemplo, se a razão do descarte não está clara, é comum aparecerem árvores de derivação com descarte de hipóteses feito em regras como $(\wedge_i)$, $(\wedge_e)$, $(\vee_i)$, $(\to_e)$ e $(\neg_e)$. Se você acha que está tudo bem uma árvore de derivação conter descarte de hipóteses nas regras citadas na frase anterior, volte para o início deste capítulo e reinicie o estudo do sistema de dedução natural antes de prosseguir :-)

Exemplo 16. *Neste exemplo, veremos que é possível fazer a introdução de uma implicação sem precisar descartar uma hipótese, se tivermos uma prova do consequente da implicação que queremos construir. Ou seja, se temos uma prova de ψ então podemos construir uma prova de $\varphi \to \psi$, qualquer que seja a fórmula φ. Em outras palavras, queremos construir uma prova para o sequente $\psi \vdash \varphi \to \psi$. A ideia da prova neste caso é simples. Vamos assumir uma prova de φ, e transformá-la em uma prova de ψ que já temos como hipótese. Para isto basta introduzirmos e em seguida eliminarmos uma conjunção contendo ψ:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^u \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\,(\wedge_i)}{\psi}\,(\wedge_e)}{\varphi \to \psi}\,(\to_i)\; u$$

Como este raciocínio aparece com frequência nas provas, vamos colocá-lo como uma regra derivada:

$$\dfrac{\psi}{\varphi \to \psi}\,(\to_i)\; \emptyset$$

Exercício 17. *Sejam φ e γ fórmulas da lógica proposicional. Construa uma prova para o sequente $\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\gamma$ na lógica proposicional minimal.*

$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}\ (\neg\neg_i)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash \neg\psi}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\ (\mathrm{MT})$	$\dfrac{\psi}{\varphi \to \psi}\ (\to_i)\ \emptyset$

Tabela 2.3: Regras derivadas da Lógica Proposicional Minimal

Exercício 18. *Sejam φ e ψ fórmulas da lógica proposicional. Construa uma prova para o sequente $\neg(\varphi \vee \psi) \vdash (\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$ na lógica proposicional minimal.*

Exercício 19. *Sejam φ e ψ fórmulas da lógica proposicional. Construa uma prova para o sequente $(\neg\varphi) \wedge (\neg\psi) \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$ na lógica proposicional minimal.*

Exercício 20. *Sejam φ, ψ e δ fórmulas da lógica proposicional. Construa uma prova para o sequente $\varphi \to \psi \vdash (\delta \vee \varphi) \to (\delta \vee \psi)$ na lógica proposicional minimal.*

Exercício 21. *Sejam φ e γ fórmulas da lógica proposicional. Construa uma prova para os sequentes $\neg(\varphi \vee \gamma) \vdash (\neg\varphi) \wedge (\neg\gamma)$ e $(\neg\varphi) \wedge (\neg\gamma) \vdash \neg(\varphi \vee \gamma)$ na lógica proposicional minimal.*

Exercício 22. *Sejam φ e γ fórmulas da lógica proposicional. Construa uma prova para o sequente $(\neg\varphi) \vee (\neg\gamma) \vdash \neg(\varphi \wedge \gamma)$ na lógica proposicional minimal.*

Exercício 23. *Sejam φ e γ fórmulas da lógica proposicional. Construa uma prova para o sequente $\neg\neg(\varphi \wedge \gamma) \vdash (\neg\neg\varphi) \wedge (\neg\neg\gamma)$ na lógica proposicional minimal.*

Exercício 24. *Sejam φ e γ fórmulas da lógica proposicional. Construa uma prova para o sequente $(\neg\neg\varphi) \wedge (\neg\neg\gamma) \vdash \neg\neg(\varphi \wedge \gamma)$ na lógica proposicional minimal.*

Exercício 25. *Sejam φ, ψ e γ fórmulas da lógica proposicional. Prove o sequente $\varphi \vee (\psi \wedge \gamma) \vdash (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \gamma)$.*

Exercício 26. *Sejam φ, ψ e γ fórmulas da lógica proposicional. Prove o sequente $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \gamma) \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \gamma)$.*

Exercício 27. *Sejam φ, ψ e γ fórmulas da lógica proposicional. Prove o sequente $\varphi \wedge (\psi \vee \gamma) \vdash (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \gamma)$.*

Exercício 28. *Sejam φ, ψ e γ fórmulas da lógica proposicional. Prove o sequente $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \gamma) \vdash \varphi \wedge (\psi \vee \gamma)$.*

Exercício 29. *Seja φ uma fórmula da lógica proposicional. Prove o sequente $\vdash \neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ na lógica proposicional minimal.*

2.1 O Assistente de provas Coq

1. Notação

   Utilizaremos algumas notações para facilitar a identificação de diferentes contextos, principalmente no que se refere ao assistente de provas Coq[34]. Os códigos do Coq são escritos em `verbatim`, mas uma sessão típica do Coq possui três janelas:

Ex. 18 $\boxed{\neg(\varphi \vee \psi)} \vdash_{NM} (\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$

hipótese

$$\dfrac{\dfrac{\boxed{\neg(\varphi\vee\psi)} \qquad \dfrac{[\varphi]^{u}}{\varphi \vee \psi}(\vee i)}{\dfrac{\bot}{\neg\varphi}(\neg i)\,u} (\neg e) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\psi]^{v}}{\varphi\vee\psi}(\vee i) \qquad \boxed{\neg(\varphi\vee\psi)}}{\bot}(\neg e)}{\neg\psi}(\neg i)\,v}{(\neg\varphi)\wedge(\neg\psi)}(\wedge i)$$

hipótese

descarte

descarte.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(\varphi\vee\psi), \varphi \vdash \neg(\varphi\vee\psi)}(Ax) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\neg(\varphi\vee\psi), \varphi \vdash \varphi}(Ax)}{\neg(\varphi\vee\psi), \varphi \vdash \varphi\vee\psi}(\vee i)}{\dfrac{\neg(\varphi\vee\psi); \varphi \vdash \bot}{\neg(\varphi\vee\psi) \vdash \neg\varphi}(\neg i)}(\neg e) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(\varphi\vee\psi), \psi \vdash \psi}(Ax)}{\neg(\varphi\vee\psi), \psi \vdash \varphi\vee\psi}(\vee i) \qquad \dfrac{}{\neg(\varphi\vee\psi), \psi \vdash \neg(\varphi\vee\psi)}(Ax)}{\neg(\varphi\vee\psi), \psi \vdash \bot}(\neg e)}{\neg(\varphi\vee\psi) \vdash \neg\psi}(\neg i)}{\neg(\varphi\vee\psi) \vdash (\neg\varphi)\wedge(\neg\psi)}(\wedge i)$$

$\boxed{\top = \bot \to \bot = \neg\bot}$

$\longrightarrow$ $\boxed{\varphi ::= p \mid \bot \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi\wedge\varphi) \mid (\varphi\vee\varphi) \mid (\varphi\to\varphi)}$

$\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi\to\psi)\wedge(\psi\to\varphi)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash p\to r}(Ax) \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash p}(Ax)}{\Gamma = \{p\to r, p, q\} \vdash r}(\to e)}{p \to r, p \vdash q \to r}(\to i)}{p\to r \vdash p \to q \to r}(\to i)}{\vdash (p\to r) \to (p \to (q \to r))}(\to i)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[q]^{w} \qquad \dfrac{[p\to r]^{u} \qquad [p]^{v}}{r}(\to e)}{q\wedge r}(\wedge i)}{r}(\wedge e)}{q\to r}(\to i)\,w}{p \to q \to r}(\to i)\,v}{(p\to r)\to p \to q \to r}(\to i)\,u$$

$\cancel{[q]^{w}}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p\to r]^{u} \qquad [p]^{v}}{r}(\to e)}{q\to r}(\to i)\,\emptyset}{p\to q\to r}(\to i)\,v}{(p\to r)\to p\to q\to r}(\to i)\,u$$