Exercício 57. *Apresente derivações em Dedução Natural para os sequentes a seguir assumindo que x não ocorre livre em ψ, em seguida classifique cada prova como minimal, intuicionista ou clássica.*

1. $(\forall x\, \phi) \wedge \psi \vdash \forall x\, (\phi \wedge \psi)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x\, \phi)\wedge\psi}{\forall x\, \phi}(\wedge e)}{\phi[x/x_0]}(\forall e) \qquad \dfrac{(\forall x\, \phi)\wedge\psi}{\psi}(\wedge e)}{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi[x/x_0]\wedge\psi}{\phi[x/x_0]\wedge\psi[x/x_0]}(\equiv)}{(\phi\wedge\psi)[x/x_0]}(\equiv)}{\forall x\,(\phi\wedge\psi)}(\forall i)}(\wedge i)$$

opc.

minimal

$\forall x\,(p(x)\wedge g(x)) \vdash (\forall x\, p(x)) \wedge (\forall x\, g(x))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,(p(x)\wedge g(x))}{p(x_0)\wedge g(x_0)}(\forall e)}{p(x_0)}(\wedge e)}{\forall x\, p(x)}(\forall i) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,(p(x)\wedge g(x))}{p(x_0)\wedge g(x_0)}(\forall e)}{g(x_0)}(\wedge e)}{\forall x\, g(x)}(\forall i)}{(\forall x\, p(x))\wedge(\forall x\, g(x))}(\wedge i)$$

$\forall x\,(p(x)\vee g(x)) \nvdash (\forall x\, p(x)) \vee (\forall x\, g(x))$

「Variáveis podem ocorrer livres ou ligadas na LPO:

livres: não está ligada a nenhum quantificador.

ligadas: ligada a um quantificador $(\exists, \forall)$

$\forall x\, p(x, y)$ — x: ligada; y: livre

- Uma variável pode ocorrer livre e ligada em uma mesma fórmula

$\exists y (g(z) \vee (\forall x'\, p(x', y)))$ — z: livre; x': ligada; y: ligada

- $\exists x' (g(x') \rightarrow (\forall x\, p(x, y)))$

- $\forall x\, g(x) \equiv \forall y\, g(y) \equiv \forall z\, g(z)$.

nomes de variáveis ligadas são irrelevantes.

$$\dfrac{\forall x\, \varphi(x)}{\varphi(t)}(\forall e)$$

A substituição em fórmulas da LPO é uma operação que não permite a captura de variáveis.

$(\forall x\, p(x, y))[y/x] =$

$\forall_z\, p(z, x)$

$(\forall_x\, q(x))[x/t] =$

$(\forall_y\, q(y))[x/t] =$

$\forall_y\, q(y) =$

$\forall_x\, q(x).$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$$\frac{\widetilde{P0} \quad \overbrace{\forall k (Pk \to P(Sk))}}{\forall_x, Px} (PIM) \qquad \frac{Pa \quad \forall k (Pk \to P(Sk))}{\forall_{x \geq a}, Px} (PIG)$$

A soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2. $\sum_{i=1}^{n} 2i-1$

$$\overbrace{1 + 3 + 5 + \quad \ldots + 2n-1} = n^2$$

BASE: $\boxed{n=1}$ trivial

h.i

PI: Assuma que $\boxed{\sum_{i=1}^{K} (2i-1) = K^2}$ e mostre que $\sum_{i=1}^{K+1} (2i-1) = \underline{(K+1)^2}$.

$$\sum_{i=1}^{K+1} (2i-1) = \underbrace{\sum_{i=1}^{K} (2i-1)} + 2(K+1) - 1 \overset{(h.i)}{=}$$

$$K^2 + 2(K+1) - 1 =$$

$K^2 + 2K + 1 = (K+1)^2$. $\blacksquare$

$$\frac{\forall k, (\forall m, m < k \Longrightarrow P\ m) \Longrightarrow P\ k}{\forall n, P\ n}\ (PIF)$$

Exercício 66. *Prove que qualquer inteiro $n \geq 2$ é um número primo ou pode ser escrito como um produto de primos (não necessariamente distintos), i.e. na forma $n = p_1.p_2.\cdots.p_r$, onde os fatores p_i $(1 \leq i \leq r)$ são primos.*

c.j.to dos números primos.

Px: $(x \geq 2$ é primo$)$ ou $(\exists k: x = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k\ (p_i \in \mathbb{P}))$

$P2$: trivial.

Assuma $\forall K(\forall m\ m < K \Rightarrow Pm)$

$P2, P3, P4, \ldots, P(K-1)$

e queremos provar que PK.

Temos K é primo ou composto:

① Se K é primo então PK.

② Se K é composto então

$\exists K_1, K_2$: $1 < K_1, K_2 < K$ e

$K = K_1 \cdot K_2$

Logo, por h.i. PK_1 e PK_2

Logo, PK. $\blacksquare$