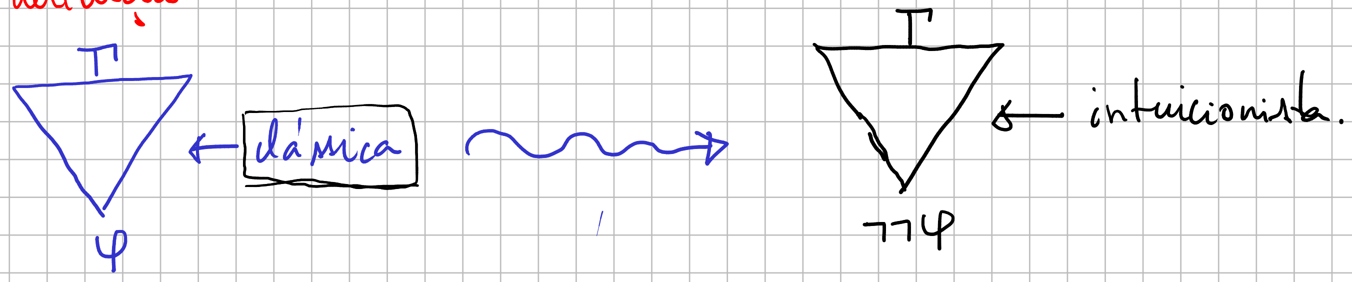
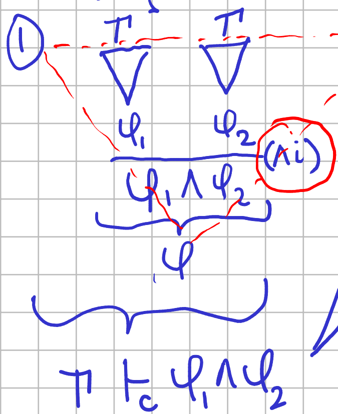
Exercício 82. *O teorema de Glivenko diz que se $\Gamma \vdash_c \varphi$ então $\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi$ na lógica proposicional, ou seja, se φ tem uma prova clássica a partir de Γ, então $\neg\neg\varphi$ tem uma prova intuicionista a partir de Γ na lógica proposicional. Prove este teorema.*

$\boxed{\underbrace{\Gamma \vdash_c \varphi}_{\text{Indução nesta derivação}} \Rightarrow \Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi}$ $\Leftarrow$



Precisamos considerar a última regra aplicada na derivação de $\Gamma \vdash_c \varphi$:

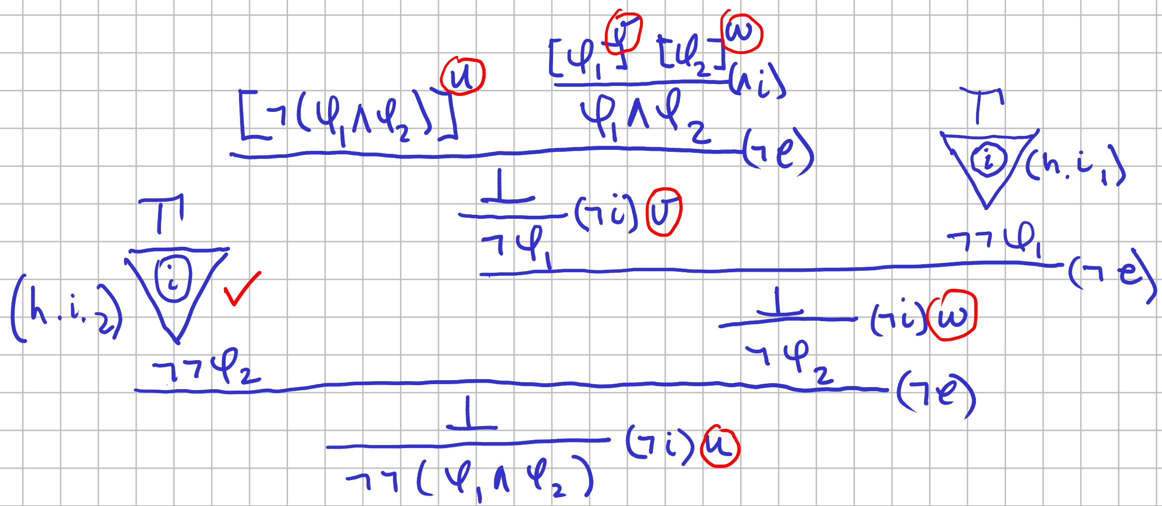
(1)



$\boxed{\Gamma \vdash_c \varphi_1 \Rightarrow \Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi_1}$ (h.i.$_1$)

$\boxed{\Gamma \vdash_c \varphi_2 \Rightarrow \Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi_2}$ (h.i.$_2$)

Queremos provar: $\boxed{\Gamma \vdash_i \neg\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)}$



$\wedge e$, $\vee i$, $\vee e$, $\rightarrow_i$, $\rightarrow_e$, $\neg\neg e$. $\Leftarrow$ Exercícios.

(2) (3) (4) (5) (6) (7)

Teorema (Correção da lógica proposicional clássica):

$$\boxed{\underbrace{T \vdash \varphi}_{\text{Indução sobre a derivação.}} \Rightarrow T \vDash \varphi}$$

consequência lógica: Dizemos que φ é consequência lógica de T, notação $T \vDash \varphi$, se $\varphi^I = V$ sempre que $T^I = V$, qualquer que seja I.

$T^I = V \Rightarrow \varphi^I = V$

	A	B	A → B
I_1 →	V	V	V ✓
I_2 →	V	F	F ←
I_3 →	F	V	V ✓
I_4 →	F	F	V

$\boxed{A \nvDash A \to B}$

$B \vDash A \to B$ ✓

① $(\wedge_i)$

$$\frac{\varphi_1 \quad \varphi_2}{\underbrace{\varphi_1 \wedge \varphi_2}_{\varphi}} (\wedge_i)$$

$\boxed{T \vdash \varphi_1 \Rightarrow T \vDash \varphi_1}$ $(h.i._1)$

$\boxed{T \vdash \varphi_2 \Rightarrow T \vDash \varphi_2}$ $(h.i._2)$

Queremos provar que $T \vDash \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

Seja I uma interpretação qualquer. Precisamos mostrar que se $\boxed{T^I = V}$ então $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^I = V$, ou seja, $\varphi_1^I = \varphi_2^I = V$ (segundo a semântica da tabela verdade). Pela $(h.i._1)$ temos que $T^I = V \Rightarrow \varphi_1^I = V$ e $(h.i._2)$ temos que $T^I = V \Rightarrow \varphi_2^I = V$.

Logo $\varphi_1^I = \varphi_2^I = V$.

$(\wedge e)$ ② $(\vee i)$ ③ $(\vee e)$ ④ $(\to_i)$ ⑤ $(\to_e)$ ⑥ $(\neg\neg e)$ ⑦ ← exercícios.

$$A \to B \nvdash A \vee B \quad \Longleftarrow \quad \overbrace{A \to B}^{V} \nvDash \overbrace{\underset{F}{A} \vee \underset{F}{B}}^{F}$$