É o caso que $\forall_x(p(x) \vee q(x)) \models \forall_x p(x) \vee \forall_x q(x)$? Em caso afirmativo, construa uma prova, e em caso negativo justifique sua resposta.

Para responder esta pergunta precisamos mostrar que qualquer modelo de $\forall x\,(p(x) \vee q(x))$ é também modelo de $(\forall x\, p(x)) \vee (\forall x\, q(x))$.

Seja I um modelo de $\forall x\,(p(x) \vee q(x))$, ou seja, $(\forall x\,(p(x) \vee q(x)))^I = V \iff$

$(p(x) \vee q(x))^I = V$, para qualquer $x \in D$, onde D é o domínio de I. $\iff$

$p(x)^I = V$ ou $q(x)^I = V$, para todo $x \in D$.

$\Updownarrow$?

$\underline{(\forall x\, p(x))^I = V}$ ou $\underline{(\forall x\, q(x))^I = V} \iff$

$$((\forall x\, p(x)) \vee (\forall x\, q(x)))^I = V$$

Note que não é possível estabelecer esta relação de consequência lógica. De fato, considere a interpretação I dada por

$$I \begin{cases} D = \mathbb{N} \\ p^I = \text{conjunto dos números naturais pares} \subseteq \mathbb{N} \\ q^I = \text{conjunto dos números naturais ímpares} \subseteq \mathbb{N}. \end{cases}$$

Temos $(\forall x\,(p(x) \vee q(x)))^I = V$. No entanto

$$((\forall x\, p(x)) \vee (\forall x\, q(x)))^I = F.$$

Portanto $\forall x\,(p(x) \vee q(x)) \not\models (\forall x\, p(x)) \vee (\forall x\, q(x))$.

ercícios

Considere a fórmula $\phi = \forall_x \forall_y (q(g(x,y), g(y,y), z))$. Construa duas interpretações $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}'$ tais que $\mathcal{M} \models \phi$ e $\mathcal{M}' \not\models \phi$.

$$\mathcal{M} \begin{cases} D = \{a\} \neq \emptyset \ \checkmark \\ g : D \times D \to D \\ \quad (a,a) \mapsto a \\ q = \{(a,a,a)\} = D^3 \\ z \mapsto a \end{cases}$$

$\mathcal{M} \models \phi$

$P(x)$: x é par

$$I \begin{cases} D = \mathbb{N} \\ P^I = \{x \in D \mid \exists y,\ x = 2y\} \subseteq D \\ \quad = \{0, 2, 4, 6, \dots\} \end{cases}$$

$r(x,y)$: x é maior do que y

$$I' \begin{cases} D = \mathbb{N} \\ r^{I'} = \{(x,y) \in D^2 \mid x > y\} \end{cases}$$

$$\mathcal{M}_2 \begin{cases} D_2 = \{a, b\} \\ g : D \times D \to D \text{ qualquer} \\ q = D^3 \\ z \text{ pode ser interpretado como qualquer elemento de } D. \end{cases}$$

$\mathcal{M}_2 \models \phi$

$$\mathcal{M}' \begin{cases} D = \{a, b\} \\ q = \emptyset \\ g : D \times D \to D \text{ é qualquer} \\ z \text{ qualquer} \end{cases}$$

$\mathcal{M}' \not\models \phi$

Exercício 80. *Seja φ uma fórmula da lógica de predicados. Definimos a tradução negativa de Gödel-Gentzen de φ, denotada por φ^N, indutivamente por:*

$$\varphi^N = \begin{cases} \neg\neg\varphi & \text{se } \varphi \text{ é uma fórmula atômica, ou a constante } \bot \\ \neg(\psi^N) & \text{se } \varphi = \neg\psi \\ \varphi_1^N \wedge \varphi_2^N & \text{se } \varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \\ \neg(\neg(\varphi_1^N) \wedge \neg(\varphi_2^N)) & \text{se } \varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2 \\ \varphi_1^N \to \varphi_2^N & \text{se } \varphi = \varphi_1 \to \varphi_2 \\ \forall_x(\psi^N) & \text{se } \varphi = \forall_x\psi \\ \neg(\forall_x \neg(\psi^N)) & \text{se } \varphi = \exists_x\psi \end{cases}$$

$(?)^N : LPO \to \underline{LPO}$

Construa uma prova intuicionista para o sequente a seguir: $\boxed{\neg\neg(\varphi^N) \vdash_i \varphi^N,\ \forall\varphi}$

Prova: Indução na estrutura de φ:

1. φ é atômica: $\varphi = p(t_1, \dots t_n)$
   φ é constante: $\varphi = \bot$
2. $\varphi = \neg\psi$
3. $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$
4. $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$
5. $\varphi = \varphi_1 \to \varphi_2$
6. $\varphi = \forall x\, \psi$
7. $\varphi = \exists x\, \psi$: Queremos mostrar que

$$\neg\neg(\exists x\, \psi)^N \vdash_i (\exists x\, \psi)^N, \text{ ou seja,}$$

$$\neg\neg(\neg(\forall x \neg\psi^N)) \vdash_i \neg(\forall x \neg\psi^N)$$

$$\boxed{\neg\neg\neg(\forall x \neg\psi^N) \vdash_i \neg(\forall x \neg\psi^N)}$$

$$\dfrac{\neg\neg\neg(\forall x \neg\psi^N) \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall x \neg\psi^N]^u \quad [\neg\forall x \neg\psi^N]^v}{\bot}(\neg e)}{\neg\neg(\forall x \neg\psi^N)}(\neg i)\, v}{\dfrac{\bot}{\neg\forall x \neg\psi^N}(\neg i)\, u}(\neg e)$$

$$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi}(\neg i)\, u$$