

$\forall x(\phi \rightarrow \psi) \vdash (\exists x\phi) \rightarrow \psi$ assumindo que x não ocorre livre em ψ .

Minimal

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\forall x(\phi \rightarrow \psi)}{(\forall e)} \quad \frac{[\phi[x/x_0]]^\sigma}{\phi[x/x_0] \rightarrow \psi} (\rightarrow e)}{\psi} (\rightarrow e)}{[\exists x\phi]^\mu} \quad \psi \quad (\exists e)^\sigma \\
 \frac{\psi}{(\exists x\phi) \rightarrow \psi} (\rightarrow_i)^\mu
 \end{array}$$

Aqui note que

$$(\phi \rightarrow \psi)[x/x_0]$$

é igual a

$$\phi[x/x_0] \rightarrow \psi[x/x_0]$$

(pela definição da substituição),

que por sua vez, é igual a

$$\phi[x/x_0] \rightarrow \psi$$

já que x não ocorre livre em ψ .