Lógica Computacional 1 (2022-1)

Seleção de exercícios para a segunda avaliação

Prof. Flávio L. C. de Moura

September 16, 2022

1. Prove o teorema de Glivenko: Sejam Γ um conjunto finito de fórmulas, e φ uma fórmula qualquer da lógica proposicional. Prove que se φ tem uma prova clássica a partir de Γ então $\neg\neg\varphi$ tem uma prova intuicionista a partir de Γ, ou seja, se $\Gamma \vdash_c \varphi$ então $\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi$.

   Solução:

   Indução na derivação $\Gamma \vdash_c \varphi$. Considerando que a negação pode ser vista como uma abreviação da implicação ao absurdo, i.e. $\neg\varphi \equiv \varphi \to \bot$, os casos $(\neg_i) \backslash$ e $(\neg_e) \backslash$ não precisam ser considerados por se tratarem de um caso particular da implicação. Considere a última regra aplicada na prova $\Gamma \vdash_c \varphi$:

   (a) $(\wedge_i)$: Neste caso, temos que φ é da forma $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ e a prova $\Gamma \vdash_c \varphi$ tem a seguinte estrutura:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla\\ \varphi_1\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla\\ \varphi_2\end{array}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\ (\wedge_i)$$

   Por hipótese de indução, temos que $\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi_i$ $(i = 1, 2)$, e concluímos como segue:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg\varphi_2\end{array} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg\varphi_1\end{array} \quad \dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)]^x \quad \dfrac{[\varphi_1]^y \qquad [\varphi_2]^z}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\ (\wedge_i)}{\bot}\ (\neg_e)}{\neg\varphi_1}\ (\neg_i)\ y}{\bot}\ (\neg_e)}{\neg\varphi_2}\ (\neg_i)\ z}{\dfrac{\bot}{\neg\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)}\ (\neg_i)\ x}\ (\neg_e)$$

   (b) $(\wedge_e)$: Neste caso, a prova $\Gamma \vdash_c \varphi$ tem a seguinte estrutura:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla\\ \varphi \wedge \psi\end{array}}{\varphi}\ (\wedge_e)$$

   Por hipótese de indução temos que $\Gamma \vdash_i \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$, e concluímos como segue:

$$\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg(\varphi\wedge\psi)\end{array}}{(\neg\neg\varphi)\wedge(\neg\neg\psi)}\ \textsc{Exercício}}{\neg\neg\varphi}\ (\wedge_e)$$

(c) $(\vee_i)$: Neste caso, temos que φ é da forma $\varphi_1 \vee \varphi_2$ e a prova $\Gamma \vdash_c \varphi$ tem a seguinte estrutura:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \triangledown\\ \varphi_1\end{array}}{\varphi_1\vee\varphi_2}\ (\vee_i)$$

Por hipótese de indução, temos que $\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi_i$ $(i = 1, 2)$, e concluímos como segue:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg\varphi_1\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi_1\vee\varphi_2)]^x \qquad \dfrac{[\varphi_1]^y}{\varphi_1\vee\varphi_2}\ (\vee_i)}{\bot}\ (\neg_e)}{\neg\varphi_1}\ (\neg_i)\ y}{\bot}\ (\neg_e)}{\neg\neg(\varphi_1\vee\varphi_2)}\ (\neg_i)\ x$$

(d) $(\vee_e)$: Neste caso, temos que φ é da forma $\varphi_1 \vee \varphi_2$ e a prova $\Gamma \vdash_c \varphi$ tem a seguinte estrutura:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \triangledown\\ (\varphi_1\vee\varphi_2)\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\varphi_1]^x,\Gamma\\ \triangledown\\ \varphi_3\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\varphi_2]^y,\Gamma\\ \triangledown\\ \varphi_3\end{array}}{\varphi_3}\ (\vee_e)\ x, y$$

Por hipótese de indução, temos que $\Gamma \vdash_i \neg\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ e $\Gamma, [\varphi_i] \vdash_i \neg\neg\varphi_3$ $(i = 1, 2)$ e concluímos como segue:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg(\varphi_1\vee\varphi_2)\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\varphi_3]^w \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\ [\varphi_1]^y\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg\varphi_3\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma\ [\varphi_2]^z\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg\varphi_3\end{array} \quad [\varphi_1\vee\varphi_2]^x}{\neg\neg\varphi_3}\ (\vee_e)\ y, z}{\bot}\ (\neg_e)}{\neg(\varphi_1\vee\varphi_2)}\ (\neg_i)\ x}{\bot}\ (\neg_e)}{\neg\neg\varphi_3}\ (\neg_i)\ w$$

(e) $(\rightarrow_i)$: Neste caso, temos que φ é da forma $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ e a prova $\Gamma \vdash_c \varphi$ tem a seguinte estrutura:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma \quad [\varphi_1]^x\\ \vdots \\ \varphi_2\end{matrix}}{\varphi_1 \to \varphi_2}\;(\to_i)$$

Por hipótese de indução, temos que $\Gamma, \varphi_1 \vdash_i \neg\neg\varphi_2$, e concluímos como segue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg\varphi_1]^w \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\varphi_2]^z \qquad \begin{matrix}\Gamma\ [\varphi_1]^x\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg\varphi_2\end{matrix}}{\bot}\;(\neg_e)}{\neg\varphi_1}\;(\neg_i)\ x}{\bot}\;(\neg_e)}{\neg\neg\varphi_2}\;(\neg_i)\ z}{\dfrac{(\neg\neg\varphi_1) \to (\neg\neg\varphi_2)}{\neg\neg(\varphi_1 \to \varphi_2)}\;\text{Exercício}}\;(\to_i)\ w$$

(f) $(\to_e)$: Neste caso, temos que φ é da forma $\varphi_1 \to \varphi_2$ e a prova $\Gamma \vdash_c \varphi$ tem a seguinte estrutura:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ \varphi_1 \to \varphi_2\end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ \varphi_1\end{matrix}}{\varphi_2}\;(\to_e)$$

Por hipótese de indução, temos que $\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi_1$ e $\Gamma \vdash_i \neg\neg(\varphi_1 \to \varphi_2)$ e concluímos como segue:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg(\varphi_1 \to \varphi_2)\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg\varphi_1\end{matrix} \qquad \dfrac{[\varphi_1 \to \varphi_2]^x \qquad [\neg\varphi_2]^y}{\neg\varphi_1}\;(\text{MT})}{\bot}\;(\neg_e)}{\neg(\varphi_1 \to \varphi_2)}\;(\neg_i), x}{\bot}\;(\neg_e)}{\neg\neg\varphi_2}\;(\neg_i), y$$

(g) (PBC): Neste caso, temos que:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma \quad [\neg\varphi]^x\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{\varphi}\;(\text{PBC})\ x$$

Por hipótese de indução, temos que $\Gamma, \neg\varphi \vdash_i \neg\neg\bot$, e concluímos como segue:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\ [\neg\varphi]^y\\ \nabla_{\text{(i.h.)}}\\ \neg\neg\bot\end{array} \qquad \dfrac{[\bot]^x}{\neg\bot}\,(\neg_i)\ x}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg\varphi}\,(\neg_i)\ y$$

2. Uma fórmula da lógica de predicados ϕ pertence ao *fragmento negativo* se ϕ pode ser construída a partir da seguinte gramática, onde $t_1, t_2, \ldots, t_n$ $(n > 0)$ são termos:

$$\phi ::= \neg p(t_1, t_2, \ldots, t_n) \ \ || \ \ \bot \ \ || \ \ (\neg\phi) \ \ || \ \ (\phi \wedge \phi) \ \ || \ \ (\phi \to \phi) \ \ || \ \ (\forall_x \phi)$$

Prove na lógica minimal que $\neg\neg\theta \vdash_m \theta$ para qualquer fórmula θ pertencente ao fragmento negativo. Use indução na estrutura de θ.

Solução:

Como sugerido no enunciado, a prova é por indução na estrutura da fórmula A que pertence ao fragmento negativo da lógica proposicional. Temos 5 casos a considerar:

(a) A é uma variável proposicional negada, isto é, $A = (\neg p)$. Neste caso precisamos provar que $\neg\neg\neg p \vdash_m \neg p$.

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg\neg p \qquad \dfrac{\dfrac{[p]^1 \qquad [\neg p]^2}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg p}\,(\neg_i)\ 2}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg p}\,(\neg_i)\ 1$$

(b) $A = \bot$. Neste caso, precisamos provar que $\neg\neg\bot \vdash_m \bot$.

$$\dfrac{\neg\neg\bot \qquad \dfrac{[\bot]^1}{\neg\bot}\,(\neg_i)\ 1}{\bot}\,(\neg_e)$$

(c) $A = (\neg B)$. Neste caso precisamos provar que $\neg\neg\neg B \vdash_m \neg B$. A prova é idêntica ao caso da variável proposicional:

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg\neg B \qquad \dfrac{\dfrac{[B]^1 \qquad [\neg B]^2}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg B}\,(\neg_i)\ 2}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg B}\,(\neg_i)\ 1$$

(d) $A = (B \wedge C)$: Neste caso, precisamos provar que $\neg\neg(B \wedge C) \vdash_m (B \wedge C)$. Por hipótese de indução temos que $\neg\neg B \vdash_m B$ e $\neg\neg C \vdash_m C$. Concluímos como a seguir:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg(B \wedge C) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[B \wedge C]^1}{B}\,(\wedge_i) \qquad [\neg B]^2}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg(B \wedge C)}\,(\neg_i)\ 1}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg B}\,(\neg_i)\ 2}{B}\,(h.i.) \qquad (*)}{B \wedge C}\,(\wedge_i)$$

onde (*) é dada por

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg(B \wedge C) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[B \wedge C]^3}{C}\,(\wedge_i) \qquad [\neg C]^4}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg(B \wedge C)}\,(\neg_i)\ 3}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg C}\,(\neg_i)\ 4}{C}\,(h.i.)
$$

(e) $A = (B \to C)$: Neste caso, precisamos provar que $\neg\neg(B \to C) \vdash_m (B \to C)$. Por hipótese de indução temos que $\neg\neg B \vdash_m B$ e $\neg\neg C \vdash_m C$. Concluímos como a seguir:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg(B \to C) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[B \to C]^2 \qquad [B]^1}{C}\,(\to_e) \qquad [\neg C]^3}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg(B \to C)}\,(\neg_i)\ 2}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg C}\,(\neg_i)\ 3}{C}\,(h.i.)}{B \to C}\,(\to_i)\ 1
$$

Todos os casos, exceto o último se resolvem como no caso proposicional. O caso em que ϕ tem a forma $\forall_x \psi$ é resolvido como a seguir:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg(\forall_x \psi) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall_x \psi]^v}{\psi}\,(\forall_e) \qquad [\neg\psi]^u}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg(\forall_x \psi)}\,(\neg_i)\ v}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg\psi}\,(\neg_i)\ u}{\psi}\,(\text{HI})}{\forall_x \psi}
$$

3. Seja φ uma fórmula da lógica de predicados. Definimos a tradução negativa de Gödel-Gentzen de φ, denotada por φ^N, indutivamente por:

$$
\varphi^N = \begin{cases}
\neg\neg\varphi & \text{se } \varphi \text{ é uma fórmula atômica, ou a constante } \bot \\
\neg(\psi^N) & \text{se } \varphi = \neg\psi \\
\varphi_1^N \wedge \varphi_2^N & \text{se } \varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \\
\neg(\neg(\varphi_1^N) \wedge \neg(\varphi_2^N)) & \text{se } \varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2 \\
\varphi_1^N \to \varphi_2^N & \text{se } \varphi = \varphi_1 \to \varphi_2 \\
\forall_x(\psi^N) & \text{se } \varphi = \forall_x \psi \\
\neg(\forall_x \neg(\psi^N)) & \text{se } \varphi = \exists_x \psi
\end{cases}
$$

Construa uma prova intuicionista para o sequente a seguir:

$$
\neg\neg(\varphi^N) \vdash_i \varphi^N
$$

Solução:

Indução na estrutura de φ.

(a) Se φ for uma fórmula atômica então $\neg\neg(\varphi^N) \stackrel{def}{=} \neg\neg\neg\neg\varphi \vdash_i \neg\neg\varphi \stackrel{def}{=} \varphi^N$. Note que na lógica intuicionista podemos eliminar a dupla negação de fórmulas negadas.

(b) Se $\varphi = \neg\psi$ então $\neg\neg(\varphi^N) = \neg\neg((\neg\psi)^N) = \neg\neg\neg\psi^N \vdash_i \neg\psi^N = (\neg\psi)^N = \varphi^N$.

(c) Se $\varphi = \varphi_1 \land \varphi_2$ então $\neg\neg(\varphi^N) = \neg\neg((\varphi_1 \land \varphi_2)^N) = \neg\neg(\varphi_1^N \land \varphi_2^N) \vdash_i (\neg\neg\varphi_1^N) \land (\neg\neg\varphi_2^N)$. Para a derivação anterior, utilize um argumento feito em exercício, e conclua como a seguir:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \vdots \\ \dfrac{(\neg\neg\varphi_1^N) \land (\neg\neg\varphi_2^N)}{\neg\neg\varphi_1^N}\,(\land_e) \\ \nabla_{h.i.} \\ \varphi_1^N \end{array} \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ \dfrac{(\neg\neg\varphi_1^N) \land (\neg\neg\varphi_2^N)}{\neg\neg\varphi_2^N}\,(\land_e) \\ \nabla_{h.i.} \\ \varphi_2^N \end{array}}{\varphi_1^N \land \varphi_2^N}\,(\land_i)$$

onde $\varphi_1^N \land \varphi_2^N \stackrel{def.}{=} (\varphi_1 \land \varphi_2)^N = \varphi^N$.

(d) $\varphi = \varphi_1 \lor \varphi_2$: Atividade 8 (o gabarito será disponibilizado em `http://flaviomoura.info/lc1-2022-1-ga.html` após finalizado o prazo de entrega)

(e) Se $\varphi = \varphi_1 \to \varphi_2$ então $\neg\neg(\varphi^N) = \neg\neg((\varphi_1 \to \varphi_2)^N) \stackrel{def.}{=} \neg\neg(\varphi_1^N \to \varphi_2^N) \vdash_i (\neg\neg\varphi_1^N) \to (\neg\neg\varphi_2^N)$, onde a derivação anterior pode ser obtida utilizando um argumento feito em exercício. Concluímos como a seguir:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ (\neg\neg\varphi_1^N) \to (\neg\neg\varphi_2^N)\end{array} \qquad \dfrac{[\varphi_1^N]^u}{\neg\neg\varphi_1^N}\,(\neg\neg_i)}{\neg\neg\varphi_2^N}\,(\to_e) \\ \nabla_{h.i.} \\ \varphi_2^N \end{array}}{(\varphi_1^N) \to (\varphi_2^n)}\,(\to_i)\ u$$

onde $(\varphi_1^N) \to (\varphi_2^N) \stackrel{def.}{=} (\varphi_1 \to \varphi_2)^N = \varphi^N$, como queríamos.

(f) $\varphi = \forall_x\psi$: Atividade 9 (o gabarito será disponibilizado em `http://flaviomoura.info/lc1-2022-1-ga.html` após finalizado o prazo de entrega)

(g) Se $\varphi = \exists_x\psi$ então $\neg\neg\varphi^N = \neg\neg(\exists_x\psi)^N = \neg\neg(\neg\forall_x\neg\psi^N) \vdash_i \neg\forall_x\neg\psi^N = (\exists_x\psi)^N = \varphi^N$, onde a derivação anterior pode ser obtida utilizando o mesmo argumento feito em exercício.

4. Sejam φ e ψ fórmulas da lógica de predicados. Dizemos que φ é equivalente a ψ quando $\varphi \models \psi$ e $\psi \models \varphi$, ou seja, as fórmulas φ e ψ têm os mesmos modelos. Considere a seguinte transformação:

   (a) $T(p) = p$, onde p é uma fórmula atômica ou uma constante
   (b) $T(\neg\phi) = \neg T(\phi)$
   (c) $T(\phi \land \psi) = T(\phi) \land T(\psi)$
   (d) $T(\phi \lor \psi) = \neg(\neg T(\phi) \land \neg T(\psi))$
   (e) $T(\phi \to \psi) = \neg(T(\phi) \land \neg T(\psi))$
   (f) $T(\forall x\phi) = \forall x T(\phi)$
   (g) $T(\exists x\phi) = \neg\forall x \neg T(\phi)$

   Mostre que para qualquer fórmula ϕ, $T(\phi)$ é equivalente a ϕ.

   Solução:

   A prova é por indução na estrutura da fórmula. Escrevemos $\varphi \equiv \psi$ para denotar que φ é equivalente a ψ.

- Se ϕ for uma fórmula atômica ou constante, então $T(\phi) \equiv \phi$ já que ambas as fórmulas são sintaticamente iguais.
- Se $\phi = \neg\phi_1$ então $T(\phi) = \neg T(\phi_1) \overset{h.i.}{\equiv} \neg\phi_1 = \phi$.
- Se $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$ então $T(\phi) = T(\phi_1) \wedge T(\phi_2) \overset{h.i.}{\equiv} \phi_1 \wedge \phi_2 = \phi$.
- Se $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$ então $T(\phi) = \neg(\neg T(\phi_1) \wedge \neg T(\phi_2)) \overset{h.i.}{\equiv} \neg(\neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2) \equiv \phi_1 \vee \phi_2 = \phi$.
- Se $\phi = \phi_1 \rightarrow \phi_2$ então $T(\phi) = \neg(T(\phi_1) \wedge \neg T(\phi_2)) \overset{h.i.}{\equiv} \neg(\phi_1 \wedge \neg\phi_2) \equiv \phi_1 \rightarrow \phi_2 = \phi$.
- Se $\phi = \forall x\phi_1$ então $T(\phi) = \forall x T(\phi_1) \overset{h.i.}{\equiv} \forall x\phi_1 = \phi$.
- Se $\phi = \exists x\phi_1$ então $T(\phi) = \neg\forall x\neg T(\phi_1) \overset{h.i.}{\equiv} \neg\forall x\neg\phi_1 \equiv \exists x\phi_1 = \phi$.