

22 de julho de 2022

Lista: Dedução Natural

Em adição aos exercícios que aparecem nas notas de aula, solucione os listados a seguir. Nas sua derivações, sempre indique qual regra dedutiva é utilizada em cada passo.

1. Prove os seguintes a seguir utilizando apenas a lógica proposicional minimal:

- (a) $\neg\neg(\phi \wedge \psi) \dashv\vdash \neg\neg\phi \wedge \neg\neg\psi.$
- (b) $\neg(\phi \vee \psi) \dashv\vdash \neg\phi \wedge \neg\psi.$
- (c) $(\phi \wedge \psi) \wedge \varphi \dashv\vdash \phi \wedge (\psi \wedge \varphi).$
- (d) $(\phi \vee \psi) \vee \varphi \dashv\vdash \phi \vee (\psi \vee \varphi).$
- (e) $\phi \rightarrow \psi \vdash \delta \vee \phi \rightarrow \delta \vee \psi$
- (f) $(\delta \wedge \phi) \vee (\delta \wedge \psi) \dashv\vdash \delta \wedge (\phi \vee \psi)$

2. Construa deduções para provar os seguintes a seguir e indique se foi utilizada a lógica minimal, intuicionista ou clássica:

- (a) $\phi \vee \psi \dashv\vdash \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi).$
- (b) $\phi \wedge \psi \dashv\vdash \neg(\neg\phi \vee \neg\psi).$
- (c) $\varphi \rightarrow \psi \dashv\vdash (\neg\varphi) \vee \psi$
- (d) $\varphi \wedge \psi \dashv\vdash \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$
- (e) $\varphi \vee \psi \dashv\vdash (\neg\varphi) \rightarrow \psi$

3. A lógica clássica é obtida acrescentando-se qualquer uma das seguintes regras à lógica proposicional intuicionista:

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{[\neg\phi]^u \quad \vdots \quad \perp}{\phi} \text{ (PBC)} & u & \frac{}{\phi \vee \neg\phi} \text{ (LEM)} \\
 \frac{\neg\neg\phi}{\phi} \text{ (}\neg\neg_e\text{)} & & \frac{}{((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow \phi} \text{ (LP)}
 \end{array}$$

A quarta regra (LP) é denominada Lei de Peirce. Demonstre que quaisquer três destas regras pode ser provada a partir da quarta regra restante e as regras da lógica intuicionista, ou seja:

- (a) Adicione a regra (PBC) ao conjunto de regras da lógica proposicional intuicionista. Com este novo conjunto de regras prove os seguintes correspondentes à lei do terceiro excluído e à eliminação da dupla negação:

- i. $\vdash \phi \vee \neg\phi$
- ii. $\neg\neg\phi \vdash \phi$
- iii. $\vdash ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow \phi$

- (b) Adicione a regra $(\neg\neg_e)$ ao conjunto de regras da lógica proposicional intuicionista. Com este novo conjunto de regras prove:

- i. $\vdash \phi \vee \neg\phi$
- ii. $\neg\phi \rightarrow \perp \vdash \phi$
- iii. $\vdash ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow \phi$

- (c) Adicione a regra (LEM) ao conjunto de regras da lógica proposicional intuicionista. Com este novo conjunto de regras prove:

- i. $\neg\phi \rightarrow \perp \vdash \phi$
- ii. $\neg\neg\phi \vdash \phi$
- iii. $\vdash ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow \phi$

- (d) Adicione a regra (LP) ao conjunto de regras da lógica proposicional intuicionista. Com este novo conjunto de regras prove:

- i. $\neg\phi \rightarrow \perp \vdash \phi$
- ii. $\neg\neg\phi \vdash \phi$
- iii. $\vdash \phi \vee \neg\phi$

4. Construa provas para todas as variantes¹ das regras (MT) e (CP) e indique quais derivações são da lógica clássica e quais da lógica intuicionista proposicional:

$$\frac{\pm\phi \rightarrow \pm\psi \quad \mp\psi}{\mp\phi} \text{ (MT}_1 \text{ e } 2) \qquad \frac{\pm/\pm\phi \rightarrow \pm/\mp\psi}{\mp/\pm\psi \rightarrow \mp/\mp\phi} \text{ (CP}_{1,2,3} \text{ e } 4)$$

5. Prove que não existe uma derivação intuicionista para os seguintes a seguir:

- (a) $\neg\exists_x\neg\varphi \vdash \forall_x\varphi$
- (b) $\neg\forall_x\neg\varphi \vdash \exists_x\varphi$
- (c) $\varphi \rightarrow \psi \vdash (\neg\varphi) \vee \psi$

¹Observe que na notação deste exercício, $+\varphi$ denota a própria fórmula φ , enquanto que $-\varphi$ denota a negação de φ , ou seja, $\neg\varphi$.