Lógica Computacional 1 (2022-1)

Avaliação de Reposição

Prof. Flávio L. C. de Moura

26 de setembro de 2022

1. (2.5 pontos) Prove que a regra a seguir não possui uma prova intuicionista.

$$\frac{\neg\psi \to \neg\phi}{\phi \to \psi}\ (CP)$$

Solução:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg\neg\varphi}{\neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi}\ (\to_i)}{\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi}\ (CP)}{\neg\neg\varphi \to \varphi}\ (CP) \qquad \neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\to_e)$$

2. Responda se cada um dos sequentes a seguir são válidos ou não. Em caso afirmativo, construa uma prova em dedução natural, e em caso negativo, construa uma interpretação que não seja modelo do sequente:

   (a) (2.5 pontos)
   $$(\forall_x p(x)) \vee (\forall_x q(x)) \vdash \forall_x (p(x) \vee q(x))$$

   Solução: É válido:

$$\cfrac{(\forall_x p(x)) \vee (\forall_x q(x)) \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{[\forall_x p(x)]^u}{p(x_0)}\ (\forall_e)}{p(x_0) \vee q(x_0)}\ (\vee_i)}{\forall_x (p(x) \vee q(x))}\ (\forall_i) \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{[\forall_x q(x)]^v}{q(x_0)}\ (\forall_e)}{p(x_0) \vee q(x_0)}\ (\vee_i)}{\forall_x (p(x) \vee q(x))}\ (\forall_i)}{\forall_x (p(x) \vee q(x))}\ (\vee_e)\ u, v$$

   (b) (2.5 pontos)
   $$\forall_x (p(x) \vee q(x)) \vdash (\forall_x p(x)) \vee (\forall_x q(x))$$

   Solução: Considere a interpretação I com domínio $D = \{a, b\}$, e tal que $p^I = \{a\}$ e $q^I = \{b\}$. Temos que $I \models \forall_x (p(x) \vee q(x))$, mas $I \not\models (\forall_x p(x)) \vee (\forall_x q(x))$, e portanto, podemos concluir pelo teorema da correção da lógica de primeira ordem que o sequente não é válido.

   (c) (2.5 pontos)
   $$\forall_x \forall_y (p(y) \to q(x)) \vdash (\exists_y p(y)) \to (\forall_x q(x))$$

   Solução: É válido:

$$
\dfrac{\dfrac{[\exists_y p(y)]^v \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall_x \forall_y (p(y) \to q(x))}{\forall_y (p(y) \to q(x_0))}\;(\forall_e)}{p(y_0) \to q(x_0)}\;(\forall_e) \qquad [p(y_0)]^v}{q(x_0)}\;(\to_e)}{\forall_x q(x)}\;(\forall_i)}{\forall_x q(x)}\;(\exists_e)\; v}{(\exists_y p(y)) \to (\forall_x q(x))}\;(\to_i)\; u
$$