Lógica Computacional 1 (2022-1)

Segunda Avaliação

Prof. Flávio L. C. de Moura

19 de setembro de 2022

1. (2.5 pontos) O teorema de Glivenko diz que $\Gamma \vdash \varphi$ é válido na lógica clássica se, e somente se, $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi$ é válido na lógica intuicionista. Ou seja, $\Gamma \vdash_c \varphi$ se, e somente se, $\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi$. Este resultado não pode ser estendido para a lógica de predicados, mas vale para uma restrição desta, a saber, a lógica de predicados sem quantificação universal. Considerando a lógica de predicados sem quantificação universal, **prove em dedução natural** que se o sequente $\Gamma \vdash_c \varphi$ então $\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi$ para o caso em que a última regra aplicada na derivação clássica é a regra de introdução do quantificador existencial.

   Solução:

   Assumindo que a última regra aplicada na prova de $\Gamma \vdash_c \varphi$ foi a introdução do existencial, temos que φ tem a forma $\exists x\psi$ para alguma fórmula ψ. Por hipótese de indução, temos que $\Gamma \vdash_i \neg\neg\psi[x/x_0]$, para algum termo x_0. A prova intuicionista de $\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi$, isto é, de $\Gamma \vdash_i \neg\neg(\exists x\psi)$ pode ser feita como segue:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{Γ}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\RightLabel{$(h.i.)$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\psi[x/x_0]$}
\AxiomC{$[\neg(\exists x\psi)]^b$}
\AxiomC{$[\psi[x/x_0]]^a$}
\UnaryInfC{$\exists x\psi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ a$}
\UnaryInfC{$\neg\psi[x/x_0]$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ b$}
\UnaryInfC{$\neg\neg(\exists x\psi)$}
\end{prooftree}
$$

2. (2.5 pontos) Uma fórmula da lógica de predicados ϕ pertence ao *fragmento negativo* se ϕ pode ser construída a partir da seguinte gramática, onde $t_1, t_2, \ldots, t_n$ $(n > 0)$ são termos:

$$\phi ::= \neg p(t_1, t_2, \ldots, t_n) \ \ || \ \ \bot \ \ || \ \ (\neg\phi) \ \ || \ \ (\phi \wedge \phi) \ \ || \ \ (\phi \to \phi) \ \ || \ \ (\forall_x \phi)$$

   Prove na lógica minimal que $\neg\neg\phi \vdash_m \phi$ por indução na estrutura de ϕ para o caso em que $\phi = \forall_x\theta$

   Solução:

   Todos os casos, exceto o último se resolvem como no caso proposicional. O caso em que ϕ tem a forma $\forall_x\psi$ é resolvido como a seguir:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg\neg(\forall_x\psi)$}
\AxiomC{$[\forall_x\psi]^v$}
\RightLabel{$(\forall_e)$}
\UnaryInfC{ψ}
\AxiomC{$[\neg\psi]^u$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ v$}
\UnaryInfC{$\neg(\forall_x\psi)$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ u$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\psi$}
\RightLabel{$(h.i.)$}
\UnaryInfC{ψ}
\UnaryInfC{$\forall_x\psi$}
\end{prooftree}
$$

3. (2.5 pontos) Seja φ uma fórmula da lógica de predicados. Definimos a tradução negativa de Gödel-Gentzen de φ, denotada por φ^N, indutivamente por:

$$\varphi^N = \begin{cases} \neg\neg\varphi & \text{se } \varphi \text{ é uma fórmula atômica, ou a constante } \bot \\ \neg(\psi^N) & \text{se } \varphi = \neg\psi \\ \varphi_1^N \wedge \varphi_2^N & \text{se } \varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \\ \neg(\neg(\varphi_1^N) \wedge \neg(\varphi_2^N)) & \text{se } \varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2 \\ \varphi_1^N \rightarrow \varphi_2^N & \text{se } \varphi = \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \\ \forall_x(\psi^N) & \text{se } \varphi = \forall_x\psi \\ \neg(\forall_x\neg(\psi^N)) & \text{se } \varphi = \exists_x\psi \end{cases}$$

Construa uma prova intuicionista para o sequente $\neg\neg(\varphi^N) \vdash_i \varphi^N$ via indução na estrutura de φ para o caso em que $\varphi = \exists_x\psi$

Solução:

Quando $\varphi = \exists_x\psi$, temos $\neg\neg\varphi^N = \neg\neg(\exists_x\psi)^N = \neg\neg(\neg\forall_x\neg\psi^N) \vdash_i \neg\forall_x\neg\psi^N = (\exists_x\psi)^N = \varphi^N$. Logo,

$$\dfrac{\dfrac{(\neg\neg_i)\,\dfrac{[\forall_x\neg\psi^N]^u}{\neg\neg\forall_x\neg\psi^N} \qquad \neg\neg\neg\forall_x\neg\psi^N}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\forall_x\neg\psi^N}\,(\neg_i)\ u$$

4. (2.5 pontos) É o caso que $(\exists_x p(x)) \wedge (\exists_x q(x)) \models \exists_x(p(x) \wedge q(x))$? Em caso afirmativo, construa uma prova em dedução natural, e em caso negativo justifique sua resposta.

Solução: Não, esta relação de consequência lógica não vale. Para justificar esta resposta apresentaremos uma interpretação I que é modelo de $(\exists_x p(x)) \wedge (\exists_x q(x))$, mas não é modelo de $\exists_x(p(x) \wedge q(x))$. Considere a interpretação I que tem o conjunto $\{a, b\}$ como domínio, e tal que $p^I = \{a\}$ e $q^I = \{b\}$. Então I é modelo de $(\exists_x p(x)) \wedge (\exists_x q(x))$, mas não é modelo de $\exists_x(p(x) \wedge q(x))$ porque nem a nem b satisfazem simultaneamente os predicados p e q.