

$$(46) \quad \varphi \leftrightarrow \neg\varphi \vdash \perp$$

$$\varphi \leftrightarrow \neg\varphi \equiv (\varphi \rightarrow \neg\varphi) \wedge (\neg\varphi \rightarrow \varphi)$$

$$(\varphi \rightarrow \neg\varphi) \wedge (\neg\varphi \rightarrow \varphi) \vdash \perp$$

$$\frac{\frac{\frac{\varphi \rightarrow \neg\varphi \wedge (\neg\varphi \rightarrow \varphi)}{\varphi \rightarrow \neg\varphi} (\wedge e) \quad \frac{[\varphi]^a}{\neg\varphi} (\rightarrow e)}{\perp} (LE) \quad \frac{\frac{\varphi \rightarrow \neg\varphi \wedge (\neg\varphi \rightarrow \varphi)}{\neg\varphi \rightarrow \varphi} (\wedge e) \quad \frac{[\neg\varphi]^b}{\varphi} (\rightarrow e)}{\perp} (\rightarrow e) \quad \frac{[\varphi]^a \quad [\neg\varphi]^b}{\perp} (\rightarrow e) \quad \frac{[\varphi]^a \quad [\neg\varphi]^b}{\perp} (\rightarrow e)}{\perp} (\vee) a, b$$

$$(45) \quad \neg\neg(\varphi \vee \psi) \vdash (\neg\neg\varphi) \vee (\neg\neg\psi)$$

$$\neg\neg(\varphi \vee \psi) \vdash (\neg\neg\varphi) \vee (\neg\neg\psi)$$

$$\frac{\frac{\neg\neg(\varphi \vee \psi)}{\varphi \vee \psi} (\neg\neg e) \quad \frac{\frac{[\varphi]^a}{\neg\neg\varphi} (\neg\neg i) \quad \frac{[\psi]^b}{\neg\neg\psi} (\neg\neg i)}{(\neg\neg\varphi) \vee (\neg\neg\psi)} (\vee i) \quad \frac{\frac{[\varphi]^a}{\neg\neg\varphi} (\neg\neg i) \quad \frac{[\psi]^b}{\neg\neg\psi} (\neg\neg i)}{(\neg\neg\varphi) \vee (\neg\neg\psi)} (\vee i)}{(\neg\neg\varphi) \vee (\neg\neg\psi)} (\vee) a, b$$

$$(\neg\neg\varphi) \vee (\neg\neg\psi) \vdash \neg\neg(\varphi \vee \psi)$$

$$\frac{\frac{\frac{[\neg\neg\varphi]^a}{\varphi} (\neg\neg e) \quad \frac{[\neg\neg\psi]^b}{\psi} (\neg\neg e)}{\varphi \vee \psi} (\vee i) \quad \frac{\frac{[\neg\neg\varphi]^a}{\varphi} (\neg\neg e) \quad \frac{[\neg\neg\psi]^b}{\psi} (\neg\neg e)}{\varphi \vee \psi} (\vee i)}{\neg\neg(\varphi \vee \psi)} (\neg\neg i) \quad \frac{\frac{[\neg\neg\varphi]^a}{\varphi} (\neg\neg e) \quad \frac{[\neg\neg\psi]^b}{\psi} (\neg\neg e)}{\varphi \vee \psi} (\vee i) \quad \frac{\frac{[\neg\neg\varphi]^a}{\varphi} (\neg\neg e) \quad \frac{[\neg\neg\psi]^b}{\psi} (\neg\neg e)}{\varphi \vee \psi} (\vee i)}{\neg\neg(\varphi \vee \psi)} (\neg\neg i) \quad \frac{(\neg\neg\varphi) \vee (\neg\neg\psi) \quad \neg\neg(\varphi \vee \psi)}{\neg\neg(\varphi \vee \psi)} (\vee) a, b$$

$$(44) \quad (\neg\varphi) \rightarrow \varphi \vdash (\neg\varphi) \rightarrow \varphi$$

$$\frac{(\neg\varphi) \rightarrow \varphi \quad [\neg\varphi]^a}{\varphi} \quad (\rightarrow_e) \quad \frac{[\neg\varphi]^b}{(\neg\varphi)} \quad (\neg_e)$$

$$\frac{\vdash}{A} (PPC)^*$$

$$\frac{\perp}{\varphi} (PPC) a \quad \frac{(\neg\varphi) \rightarrow \varphi}{(\neg\varphi) \rightarrow \varphi} (\rightarrow_i) b$$

$$\frac{}{((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi} (LP)$$

Loi de Peirce:

$$(LTE) \stackrel{(i)}{\Leftrightarrow} (LP) \stackrel{(i)}{\Leftrightarrow} (\neg_e) \stackrel{(i)}{\Leftrightarrow} (PPC)$$

$$(43) \quad \varphi \rightarrow \varphi \vdash (\neg\varphi) \vee \varphi$$

$$\varphi \rightarrow \varphi \vdash (\neg\varphi) \vee \varphi$$

$$\frac{\varphi \vee \neg\varphi \quad (LTE) \quad \frac{\varphi \rightarrow \varphi \quad [\varphi]^a}{\varphi} (\rightarrow_e) \quad \frac{[\neg\varphi]^b}{(\neg\varphi) \vee \varphi} (\vee_i)}{(\neg\varphi) \vee \varphi} (\vee_i) \quad \frac{[\neg\varphi]^b}{(\neg\varphi) \vee \varphi} (\vee_i) \quad \frac{[\varphi]^a}{\varphi} (\vee_e) a, b$$

$$(\neg\varphi) \vee \varphi \vdash \varphi \rightarrow \varphi$$

$$\frac{(\neg\varphi) \vee \varphi \quad \frac{[\neg\varphi]^a \quad [\varphi]^b}{\perp} (\neg_e)}{\varphi} (\perp_e) \quad \frac{[\varphi]^c}{(\neg\varphi) \vee \varphi} (\vee_e) a, c}{\varphi \rightarrow \varphi} (\rightarrow_i) b$$

(47) $\varphi \rightarrow \psi \vdash (\neg\varphi) \vee \psi$ não possui derivação intuicionista.

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{(\neg\varphi) \vee \psi} (R)$$

$$\vdash_{\text{HIR}} \neg A \vee A$$

$$\frac{\frac{[A]^x}{A \rightarrow A} (\rightarrow I)_x}{(\neg A) \vee A} (R)$$

(42) $\varphi \wedge \psi \vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$

$\varphi \wedge \psi \vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$

$$\frac{\frac{(\neg e) \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \quad \frac{(\neg e) \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \quad [\neg\psi]^c}{\perp} (e)}{[\neg\varphi \vee \neg\psi]^a \quad \perp} \quad \frac{(\neg e) \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \quad [\neg\psi]^c}{\perp} (e)}{\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)} (i)_a \quad (e)_{b,c}$$

$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vdash \varphi \wedge \psi$

$$\frac{\frac{\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \quad \frac{[\neg\varphi]^a}{\neg\varphi \vee \neg\psi} (v_i)}{\perp} (i)_a \quad \frac{\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \quad \frac{[\neg\psi]^b}{\neg\varphi \vee \neg\psi} (v_i)}{\perp} (i)_b}{\frac{\perp}{\neg\varphi} (i)_a \quad \frac{\perp}{\psi} (i)_b} (i)_c$$

$\varphi \wedge \psi$

$$(4) \quad \frac{\vdash \varphi \vee \neg \varphi}{\text{P16}}$$

$$\frac{[\neg(\varphi \vee \neg \varphi)]^b}{\varphi \vee \neg \varphi} \quad \begin{array}{l} (v_i) \\ (c) \end{array}$$

$$\frac{\perp}{\neg \varphi} \quad (v_i) a$$

$$\frac{\perp}{\varphi \vee \neg \varphi} \quad (v_i)$$

$$[\neg(\varphi \vee \neg \varphi)]^b \quad (c)$$

$$\frac{\perp}{\varphi \vee \neg \varphi} \quad (P16) b$$