

Lógica Computacional 1 (2023-2)

Avaliação Escrita

Prof. Flávio L. C. de Moura

09 de outubro de 2023

- Por favor, coloque **nome** e **matrícula** em todas as folhas
- A resolução pode ser feita à lápis ou caneta, mas seja organizado.
- Esta avaliação é **individual** e **sem consulta**.
- Início: 20:50
- Término: 22:30

1 Questões

1. (2.5 pontos) Construa uma prova em **dedução natural** na **lógica proposicional minimal** para o sequente $\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$.

Solução:

$$\begin{array}{c}
 (\rightarrow_e) \frac{\varphi \rightarrow \psi \quad [\varphi]^v}{\psi} \quad \frac{[\neg\psi]^u}{\perp} (\neg_e) \\
 \hline
 \perp \\
 \hline
 \neg\varphi \quad (\neg_i)v \\
 \hline
 \neg\psi \rightarrow \neg\varphi \quad (\rightarrow_i)u
 \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{c}
 \frac{\varphi \rightarrow \psi \quad [\neg\psi]^u}{\neg\varphi} (MT) \\
 \hline
 \neg\psi \rightarrow \neg\varphi \quad (\rightarrow_i)u
 \end{array}$$

2. (2.5 pontos) Construa uma prova em **dedução natural** na **lógica proposicional minimal** para o sequente $\neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \vdash (\neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\neg\psi)$.

Solução:

$$\begin{array}{c}
 \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \vdash (\neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\neg\psi) \\
 \frac{\frac{\frac{\frac{[\neg\neg\varphi]^a}{\perp} (\neg_i)c}{\neg\varphi} (\neg_e)d}{\perp} (\neg_e)e}{\neg\neg\varphi} (\neg_i)f} \quad \frac{\frac{[\varphi \rightarrow \psi]^b \quad [\varphi]^c}{\psi} (\rightarrow_e)g}{\perp} (\neg_e)h}{\neg(\varphi \rightarrow \psi)} (\neg_i)i} \\
 \hline
 \neg\neg\psi \quad (\neg_i)j \\
 \hline
 (\neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\neg\psi) \quad (\rightarrow_i)k
 \end{array}$$

3. (2.5 pontos) Construa uma prova em **dedução natural** na **lógica proposicional intuicionista** para o seqüente $(\neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\neg\psi) \vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$.

Solução:

$$\begin{array}{c}
 (\neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\neg\psi) \vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \\
 \frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\perp}{\neg\neg\varphi} \text{ (i)c}}{\neg\neg\varphi} \text{ (c)} \quad \frac{\frac{\frac{\perp}{\varphi \rightarrow \psi} \text{ (i)b}}{\varphi \rightarrow \psi} \text{ (c)}}{[\neg(\varphi \rightarrow \psi)]^a} \text{ (c)}}{\perp} \text{ (c)}}{\neg\neg\varphi} \text{ (i)c}}{\perp} \text{ (c)} \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\perp}{\neg\neg\psi} \text{ (i)d}}{\neg\neg\psi} \text{ (c)} \quad \frac{\frac{\frac{\perp}{\varphi \rightarrow \psi} \text{ (i)\phi}}{\varphi \rightarrow \psi} \text{ (c)}}{[\neg(\varphi \rightarrow \psi)]^d} \text{ (c)}}{\perp} \text{ (c)}}{\neg\neg\psi} \text{ (i)d}}{\perp} \text{ (c)}}{\neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)} \text{ (i)a}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \vdash B \vdash A \rightarrow B \\
 \frac{[A]^x \quad B \text{ (i)}}{A \wedge B \text{ (i)}} \\
 \frac{B}{A \rightarrow B \text{ (i)}} \\
 \downarrow \\
 \boxed{\frac{B}{A \rightarrow B} \text{ (i)} \phi}
 \end{array}$$

4. (2.5 pontos) Prove que a regra a seguir não possui uma prova intuicionista.

$$\frac{\neg\psi \rightarrow \neg\phi}{\phi \rightarrow \psi} \text{ (CP)}$$

Solução:

$$\frac{\frac{\frac{\neg\neg\varphi}{\neg\neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi} \text{ (CP)}}{\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\neg\varphi} \text{ (CP)}}{\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi} \text{ (CP)} \quad \frac{\neg\neg\varphi}{\varphi} \text{ (i)e)}$$

$\frac{\varphi \ \psi}{\varphi \wedge \psi} (\wedge_i)$	$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} (\wedge_e)$	$\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} (\wedge_e)$
$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} (\vee_i)$	$\frac{\psi}{\varphi \vee \psi} (\vee_i)$	$\frac{\varphi \vee \psi}{\chi} \frac{[\varphi]^u \quad [\psi]^v}{\chi} (\vee_e) u, v$
$\frac{[\varphi]^u \quad \vdots \quad \psi}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i) u$	$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} (\rightarrow_e)$	
$\frac{[\varphi]^u \quad \vdots \quad \perp}{\neg \varphi} (\neg_i) u$	$\frac{\varphi \quad \neg \varphi}{\perp} (\neg_e)$	
$\frac{\perp}{\varphi} (\perp_e)$	$\frac{[\neg \varphi]^u \quad \vdots \quad \perp}{\varphi} (PBC) u$	