Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação

Lógica Computacional 1 (2023-2)

Segunda Avaliação

Prof. Flávio L. C. de Moura

13 de dezembro de 2023

Nome:

Matrícula:

- A resolução pode ser feita à lápis ou caneta, mas seja organizado;
- Esta avaliação é **individual** e **sem consulta**;
- Início: 20:50;
- Término: 22:30.

Resolva as questões a seguir:

Questão 1 *O sistema de dedução natural é equivalente ao cálculo de sequentes. Para o caso intuicionista, esta equivalência é estabelecida mostrando-se que qualquer prova em dedução natural pode ser simulada em cálculo de sequentes e vice-versa,* i.e.

$$\Gamma \vdash_N \varphi \textit{ se, e somente se } \vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$$

A prova de equivalência citada acima é feita por indução na estrutura da derivação.

1. ***(2.5 pontos)*** *O sentido* $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$ *implica* $\Gamma \vdash_N \varphi$ *prova-se por indução em* $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$*. Considere o caso em que a última regra aplicada foi o corte (intuicionista):*

$$\dfrac{\begin{array}{c}\nabla_1\\ \Gamma \Rightarrow \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\nabla_2\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \varphi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\ (Cut)$$

Construa uma derivação correspondente em dedução natural. Para isto suponha, por hipótese de indução, que existem derivações ∇'_1 e ∇'_2 para $\Gamma \vdash_N \psi$ e $\psi, \Gamma \vdash_N \varphi$ como a seguir:

$$\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla'_1\\ \psi\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c}\psi, \Gamma\\ \nabla'_2\\ \varphi\end{array}$$

Agora combine estas duas derivações para obter uma derivação para $\Gamma \vdash_N \varphi$.

Solução

$$\begin{array}{c}\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla'_1\\ \psi\end{array} \quad \Gamma\\ \nabla'_2\\ \varphi\end{array}$$

2. *(**2.5 pontos**) O sentido $\Gamma \vdash_N \varphi$ implica $\vdash_G \Gamma \implies \varphi$ prova-se por indução em $\Gamma \vdash_N \varphi$. Considere o caso em que a última regra aplicada foi a eliminação do existencial:*

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla_1\\ \exists_x \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi[x/x_0]]^a\ \Gamma\\ \nabla_2\\ \varphi\end{array}}{\varphi}\ (\exists_e), a$$

Construa uma derivação no cálculo de sequentes para $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$.

Solução

$$\dfrac{\begin{array}{c}\nabla'_1\\ \Gamma \Rightarrow \exists x \psi\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\nabla'_2\\ \psi[x/x_0], \Gamma \Rightarrow \varphi\end{array}}{\exists x \psi, \Gamma \Rightarrow \varphi}\ (L_\exists)}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\ (Cut)$$

Questão 2 *O teorema de Glivenko diz que se $\Gamma \vdash_c \varphi$ então $\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi$ na lógica proposicional, ou seja, se φ tem uma prova clássica a partir de Γ, então $\neg\neg\varphi$ tem uma prova intuicionista a partir de Γ na lógica proposicional. Este resultado não pode ser estendido para a lógica de predicados, mas vale para uma restrição desta, a saber, a lógica de predicados sem quantificação universal. Considerando a lógica de predicados sem quantificação universal, prove por indução que se $\Gamma \vdash_c \varphi$ então $\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi$ para o caso em que a última regra aplicada na derivação de $\Gamma \vdash \varphi$ é:*

1. *(**2.5 pontos**) a introdução do quantificador existencial.*

Solução

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma}{\vdots}}{\neg\neg\psi[x/x_0]}\;(h.i.) \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(\exists x\psi)]^b \qquad \dfrac{[\psi[x/x_0]]^a}{\exists x\psi}\;(\exists_i)}{\bot}\;(\neg_e)}{\neg\psi[x/x_0]}\;(\neg_i)\ a}{\bot}\;(\neg_e)}{\neg\neg(\exists x\psi)}\;(\neg_i)\ b$$

2. *(**2.5 pontos**) a eliminação do quantificador existencial.*

Solução

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma}{\vdots}}{\neg\neg\exists x\psi}\;(h.i.) \qquad \dfrac{\dfrac{[\exists x\psi]^a \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\psi[x/x_0]]^b}{\vdots}}{\neg\neg\varphi}\;(h.i.) \qquad [\neg\varphi]^c}{\bot}\;(\neg_e)}{\bot}\;(\exists_e)\ b}{\neg\exists x\psi}\;(\neg_i)\ a}{\bot}\;(\neg_e)}{\neg\neg\varphi}\;(\neg_i)\ c$$

$$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i) \qquad \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge_e) \quad \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ (\wedge_e)$$

$$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i) \quad \dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i) \qquad \dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]^v\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\vee_e)\ u, v$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i)\ u \qquad \dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to_e)$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ (\neg_i)\ u \qquad \dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg_e)$$

$$\dfrac{\bot}{\varphi}\ (\bot_e) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^u\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}\ (\text{PBC})\ u$$

$$\dfrac{\varphi[x/x_0]}{\forall_x \varphi}\ (\forall_i) \qquad \dfrac{\forall_x \varphi}{\varphi[x/t]}\ (\forall_e)$$

onde x_0 não ocorre em hipótese não descartada na prova de $\varphi[x/x_0]$

$$\dfrac{\varphi[x/t]}{\exists_x \varphi}\ (\exists_i) \qquad \dfrac{\exists_x \varphi \qquad \begin{array}{c}[\varphi[x/x_0]]^u\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\exists_e)\ u$$

onde x_0 é variável nova que não ocorre em χ.

Axiomas:

$$\Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta \;\; (Ax) \qquad\qquad \bot, \Gamma \Rightarrow \Delta \;\; (L_\bot)$$

Regras estruturais:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (Lw) \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\ (Rw)$$

$$\frac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (Lc) \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\ (Rc)$$

Regras lógicas:

$$\frac{\varphi_1, \varphi_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\wedge) \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}\ (R_\wedge)$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\vee) \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_{i \in \{1,2\}}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_1 \vee \varphi_2}\ (R_\vee)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\to) \qquad\qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi}\ (R_\to)$$

$$\frac{\varphi[x/t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall_x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\forall) \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall_x \varphi}\ (R_\forall), \quad y \notin FV(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\varphi[x/y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists_x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\exists), \quad y \notin FV(\Gamma, \Delta) \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists_x \varphi}\ (R_\exists)$$

$$\boxed{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma\Gamma' \Rightarrow \Delta\Delta'}\ (Cut)}$$