

Lógica Computacional 1

Lógica Proposicional - Lista de Exercícios

Flávio L. C. de Moura*

1 Lógica Proposicional Minimal

O sistema de Dedução Natural da Lógica Proposicional Minimal (LPM) é composto das seguintes regras:

Regras de Introdução	Regras de Eliminação
$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} (\wedge_i)$	$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} (\wedge_e) \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} (\wedge_e)$
$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} (\vee_i) \quad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} (\vee_i)$	$\frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{c} [\varphi]^u \\ \vdots \\ \chi \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi]^v \\ \vdots \\ \chi \end{array}}{\chi} (\vee_e) u, v$
$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i) u$	$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} (\rightarrow_e)$
$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^u \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg \varphi} (\neg_i) u$	$\frac{\varphi \quad \neg \varphi}{\perp} (\neg_e)$

2 Lógica Proposicional Intuicionista

O sistema de Dedução Natural da Lógica Proposicional Intuicionista (LPI) é formado pelas regras da LPM juntamente com a regra de eliminação do absurdo

*flaviomoura@unb.br

intuicionista (também conhecida como regra da explosão):

$$\frac{\perp}{\varphi} (\perp_e)$$

2.1 Prove os sequentes a seguir na LPM ou na LPI

- 2.1.1 $\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$
- 2.1.2 $\neg\neg(\varphi \wedge \psi) \dashv\vdash (\neg\neg\varphi) \wedge (\neg\neg\psi)$
- 2.1.3 $\neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \dashv\vdash (\neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\neg\psi)$
- 2.1.4 $(\varphi \wedge \psi) \wedge \gamma \dashv\vdash \varphi \wedge (\psi \wedge \gamma)$
- 2.1.5 $(\varphi \vee \psi) \vee \gamma \dashv\vdash \varphi \vee (\psi \vee \gamma)$
- 2.1.6 $(\delta \wedge \varphi) \vee (\delta \wedge \psi) \dashv\vdash \delta \wedge (\varphi \vee \psi)$
- 2.1.7 $\vdash \neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$
- 2.1.8 $\vdash \neg\neg(\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi)$
- 2.1.9 $\vdash \neg\neg(((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$

3 Lógica Proposicional Clássica

O sistema de Dedução Natural da Lógica Proposicional Clássica (LPC) é formado pelas regras da LPI juntamente com a regra de eliminação do absurdo clássico (também conhecida como prova por contradição):

$$\begin{array}{c} [\neg\varphi]^u \\ \vdots \\ \frac{\perp}{\varphi} (PBC) u \end{array}$$

3.1 Prove os sequentes a seguir, apresentando uma prova intuicionista sempre que possível. Quando a prova apresentada for clássica, mostre que o sequente não possui prova intuicionista.

- 3.1.1 $\varphi \vee \psi \dashv\vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
- 3.1.2 $\varphi \wedge \psi \dashv\vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$
- 3.1.3 $\varphi \rightarrow \psi \dashv\vdash (\neg\varphi) \vee \psi$
- 3.1.4 $\varphi \wedge \psi \dashv\vdash \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$
- 3.1.5 $\varphi \vee \psi \dashv\vdash (\neg\varphi) \rightarrow \psi$
- 3.1.6 $\neg\neg(\varphi \vee \psi) \dashv\vdash (\neg\neg\varphi) \vee (\neg\neg\psi)$
- 3.1.7 $\pm\varphi \rightarrow \pm\psi, \mp\psi \vdash \mp\varphi$, onde $+\varphi = \varphi$ e $-\varphi = \neg\varphi$
- 3.1.8 $\pm/\pm\varphi \rightarrow \pm/\mp\psi \vdash \mp/\pm\psi \rightarrow \mp/\mp\varphi$, onde $+\varphi = \varphi$ e $-\varphi = \neg\varphi$