

# Lógica Computacional 1

Flávio L. C. de Moura\*

## 1 A Lógica Proposicional

A lógica proposicional (LP) é baseada na noção **proposição**, que é uma sentença que pode ser qualificada como verdadeira ou falsa, mas nunca ambos. Por exemplo, são proposições:

- $2+2 = 4$ .
- $1+3 < 0$ .
- 2 é um número primo.
- João tem 20 anos e Maria tem 22 anos.

Mas nem toda sentença é uma proposição. De fato, a sentença "Feche a porta!", ou ainda a pergunta "Qual é o seu nome?" não podem ser qualificadas como verdadeira ou falsa, e portanto não são proposições. Estudaremos diversas lógicas distintas, e todas elas utilizam *fórmulas* como elementos fundamentais. As fórmulas são expressões ou *strings* (sequência de símbolos) utilizados para representar uma proposição. Por exemplo, utilizaremos letras latinas minúsculas para representar proposições que não podem ser subdivididas em proposições menores como " $2+2=4$ ", mas não "João tem 20 anos e Maria tem 22 anos". Chamamos estas letras latinas minúsculas de *variáveis proposicionais*. Assim, a variável proposicional é o elemento básico utilizado na construção das fórmulas.

Faremos um estudo incremental partindo de lógicas mais simples e pouco expressivas, e aos poucos vamos incrementando o poder de expressividade destas lógicas tendo o contexto computacional como referência. Trabalharemos com a lógica simbólica de forma que o significado de uma variável proposicional (ou a informação que ela codifica) será irrelevante daqui para frente. Outro aspecto importante é que o foco do nosso estudo é a construção de provas. Para isto utilizaremos um sistema dedutivo conhecido como *dedução natural*. Este sistema foi criado pelo lógico alemão Gerhard Gentzen (1909-1945), e consiste em um sistema lógico composto por um conjunto de regras de inferência que tenta capturar o raciocínio matemático da forma mais *natural* possível.

Partindo de um conjunto enumerável de variáveis proposicionais, iniciaremos nosso estudo pelo conectivo binário chamado *implicação*. Podemos representar as fórmulas que podem ser construídas com este conectivo pela seguinte gramática:

$$\varphi ::= p \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \tag{1}$$

onde  $p$  denota um elemento de um conjunto enumerável de variáveis proposicionais, *i.e.* temos número finito, mas arbitrário, de variáveis proposicionais para construir uma fórmula. O construtor  $\varphi \rightarrow \varphi$  diz que uma fórmula implicacional é construída a partir de duas fórmulas já construídas anteriormente. Por exemplo, se  $p$  e  $q$  denotam variáveis proposicionais então podemos concluir que  $p \rightarrow q$  é uma fórmula, e neste caso, chamamos  $p$  de *antecedente*, e  $q$  de *sucedente* da implicação. Utilizando esta nova fórmula, podemos construir uma nova implicação a partir dela, e por exemplo,  $p$ , obtendo  $(p \rightarrow q) \rightarrow p$  ou  $p \rightarrow (p \rightarrow q)$ , e assim por diante. Como indicado pela gramática (1), utilizaremos letras gregas minúsculas para representar fórmulas do fragmento implicacional da lógica proposicional.

Nosso objetivo agora é raciocinar sobre as estas fórmulas. Mais especificamente, queremos obter (ou derivar) novas informações a partir de informações conhecidas. Tudo isto em um contexto abstrato onde os símbolos proposicionais utilizados podem representar qualquer informação que corresponda a uma

---

\*flaviomoura@unb.br

proposição. Utilizaremos a notação de *sequentes* para separar as informações (fórmulas) dadas da nova informação (fórmula) que queremos concluir. Chamaremos as fórmulas dadas de *premissas*, e a fórmula a ser derivada de *conclusão*, assim um sequente é formado por duas partes: um conjunto finito de fórmulas (que são as premissas), digamos  $\Gamma$ , e uma fórmula que é a conclusão, digamos  $\varphi$ , que escrevemos como  $\Gamma \vdash \varphi$ . Assim, se  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  são as premissas de um sequente, e se  $\psi$  é a sua conclusão, então escrevemos  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \vdash \psi$  para representar o sequente que tem  $\psi$  como conclusão, e o conjunto  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$  de premissas. O conjunto  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ , isto é, a primeira componente do sequente  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \vdash \psi$  também pode ser chamado de *contexto* ao longo do texto, e normalmente será escrito sem as chaves que usualmente são usadas para representar conjuntos. Este é um abuso de linguagem usado para deixar a notação mais leve. Assim, se  $\Gamma$  denota um conjunto finito de fórmulas, ao invés de  $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ , escreveremos simplesmente  $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ , onde  $\Gamma, \varphi$  deve então ser lido como a união  $\Gamma$  com o conjunto unitário  $\{\varphi\}$ .

O conceito de prova agora será definido de forma mais precisa. Concretamente, uma prova (ou uma derivação) de um sequente da forma  $\Gamma \vdash \psi$  é uma sequência de passos dedutivos, e um passo dedutivo consiste na aplicação de uma *regra de inferência* que possui a seguinte forma:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \gamma_1 \quad \Gamma_2 \vdash \gamma_2 \quad \dots \quad \Gamma_k \vdash \gamma_k}{\Gamma \vdash \psi}$$

onde  $k \geq 0$ . Quando  $k = 0$  e  $\Gamma = \{\psi\}$  a regra corresponde a um *axioma*:

$$\frac{}{\{\psi\} \vdash \psi} \text{ (Ax)}$$

Uma prova (*i.e.* uma sequência de passos dedutivos) pode ser representada por meio de uma estrutura de árvore, onde os nós são anotados com sequentes. A raiz da árvore é anotada com o sequente que queremos provar, digamos,  $\Gamma \vdash \psi$ , e as são axiomas. Quais são as regras de inferência que podem ser utilizadas no fragmento implicacional da lógica proposicional? Além do axioma apresentado acima, temos duas regras para a implicação. Antes de apresentá-las devemos lembrar que o sistema dedutivo que utilizaremos se chama *dedução natural*, e as regras deste sistema são divididas em dois tipos: *introdução* e *eliminação*. A regra de eliminação da implicação é conhecida pelo nome *modus ponens* e tem a seguinte estrutura:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma_2 \vdash \varphi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \psi} \text{ } (\rightarrow_e)$$

ou seja, para construirmos uma prova de um sequente com a forma  $\Gamma \vdash \psi$  utilizando esta regra, precisamos construir duas outras provas: uma do sequente  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ , e outra do sequente  $\Gamma \vdash \varphi$ . Ou seja, na leitura desta regra de baixo para cima (*i.e.* da conclusão para as premissas) reduzimos o problema de provar  $\Gamma \vdash \psi$  a dois outros problemas (potencialmente) mais simples. Esta regra também pode ser lida de cima para baixo (*i.e.* das premissas para a conclusão), e neste caso precisamos de uma prova de uma implicação, a saber  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ , e de uma prova do antecedente desta implicação, a saber  $\Gamma \vdash \varphi$  para construirmos uma prova da conclusão da implicação, ou seja, uma prova de  $\Gamma \vdash \psi$ .

A regra de introdução é bastante intuitiva e, em certo sentido, nos fornece uma definição da implicação:

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} \text{ } (\rightarrow_i)$$

ou seja, na leitura de baixo para cima, para construirmos a prova de uma implicação precisamos construir uma prova do sucedente assumindo que temos uma prova do antecedente. Na leitura de cima para baixo, precisamos transformar uma prova do antecedente em uma prova do sucedente.

O interesse computacional do fragmento implicacional está diretamente relacionado ao algoritmo de inferência de tipos em linguagens funcionais[5]. O fundamento teórico destas linguagens é o cálculo  $\lambda$ [2] desenvolvido por Alonzo Church em 1936 [3, 4]. Para mais detalhes veja o Capítulo 1 de [1]. Vejamos um exemplo.

**Exemplo 1.1.** Considere o sequente  $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow p \rightarrow r$ . A primeira observação a ser feita aqui é que a implicação é associativa à direita, ou seja,  $\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \gamma$  deve ser lido como  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma)$ , e não como  $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \gamma$ . Portanto, o sequente que queremos provar deve ser lido como  $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$ . Utilizando inicialmente a regra  $(\rightarrow_i)$ , temos a seguinte situação:

$$\frac{p \rightarrow q \vdash (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)}{\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))} (\rightarrow_i)$$

Agora podemos aplicar novamente a regra  $(\rightarrow_i)$ :

$$\frac{\frac{p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r}{p \rightarrow q \vdash (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)} (\rightarrow_i)}{\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)} (\rightarrow_i)$$

E mais uma vez, já que a conclusão do sequente é ainda uma implicação:

$$\frac{\frac{\frac{p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \vdash r}{p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r} (\rightarrow_i)}{p \rightarrow q \vdash (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)} (\rightarrow_i)}{\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)} (\rightarrow_i)$$

Agora não é mais possível utilizar a regra  $(\rightarrow_i)$  porque a conclusão  $r$  não é uma implicação, mas podemos utilizar a hipótese  $q \rightarrow r$  para obter  $r$ , desde que tenhamos uma prova de  $q$  para utilizarmos  $(\rightarrow_e)$ . Neste ponto, a árvore é bifurcada em dois ramos e precisamos dividir o contexto de forma adequada em cada um dos ramos.

$$\frac{\frac{\frac{p \rightarrow q, p \vdash q}{p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \vdash r} (\rightarrow_e)}{p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r} (\rightarrow_i)}{\frac{\frac{p \rightarrow q \vdash (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)}{\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)} (\rightarrow_i)}{p \rightarrow q, p \vdash q} (\rightarrow_e)}{\frac{\frac{q \rightarrow r \vdash q \rightarrow r} (\text{Ax})}{q \rightarrow r \vdash q \rightarrow r} (\rightarrow_e)}{p \rightarrow q, p \vdash q} (\rightarrow_e)} (\rightarrow_i)$$

Observe que o ramo da direita consiste em um axioma já que a fórmula  $q \rightarrow r$  pertence ao conjunto de hipóteses. No ramo da esquerda podemos obter  $q$  por meio da regra  $(\rightarrow_e)$  com as hipóteses  $p \rightarrow q$  e  $p$ . A prova completa é dada a seguir:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{p \vdash p} (\text{Ax})}{p \rightarrow q, p \vdash q} (\rightarrow_e)}{p \rightarrow q, p \vdash q} (\rightarrow_e)}{\frac{\frac{p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \vdash r}{p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r} (\rightarrow_i)}{p \rightarrow q, p \vdash q} (\rightarrow_e)}{\frac{\frac{q \rightarrow r \vdash q \rightarrow r} (\text{Ax})}{q \rightarrow r \vdash q \rightarrow r} (\rightarrow_e)}{p \rightarrow q, p \vdash q} (\rightarrow_e)} (\rightarrow_i)$$

Este primeiro exemplo possui uma característica importante: a escolha da regra a ser aplicada em cada passo é única, e portanto não temos outra opção para a construção desta prova! Se todo sequente tivesse esta característica, poderíamos construir um programa de computador que fizesse este trabalho

para nós. Mesmo programas que não foram desenvolvidos especificamente para a construção destas provas podem resolver facilmente estas situações particulares.

**Exemplo 1.2.** Considere o sequente  $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p \rightarrow q)$ . Como no exemplo anterior, iniciaremos com uma aplicação da regra  $(\rightarrow_i)$ :

$$\frac{p \rightarrow q \vdash p \rightarrow p \rightarrow q}{\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p \rightarrow q)} (\rightarrow_i)$$

Podemos aplicar a regra  $(\rightarrow_i)$  mais duas vezes:

$$\frac{\frac{\frac{p \rightarrow q, p \vdash q}{p \rightarrow q, p \vdash p \rightarrow q} (\rightarrow_i)}{p \rightarrow q \vdash p \rightarrow p \rightarrow q} (\rightarrow_i)}{\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p \rightarrow q)} (\rightarrow_i)$$

Como o contexto é um conjunto de fórmulas, a nova introdução de  $p$  não adiciona nenhuma fórmula no contexto porque os conjuntos  $\{p \rightarrow q, p\}$  e  $\{p \rightarrow q, p, p\}$  são idênticos. E agora, podemos concluir esta prova com uma aplicação de  $(\rightarrow_e)$ :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{p \vdash p}{p \vdash p} (\text{Ax})}{p \rightarrow q, p \vdash p \rightarrow q} (\text{Ax})}{p \rightarrow q, p \vdash p \rightarrow q} (\rightarrow_e)}{\frac{p \rightarrow q, p \vdash p \rightarrow q}{p \rightarrow q, p \vdash p \rightarrow q} (\rightarrow_i)} (\rightarrow_i)$$

$$\frac{\frac{p \rightarrow q, p \vdash p \rightarrow q}{p \rightarrow q \vdash p \rightarrow p \rightarrow q} (\rightarrow_i)}{\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p \rightarrow q)} (\rightarrow_i)$$

**Exercício 1.3.** Prove o sequente  $\vdash (p \rightarrow p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow q$ .

**Exercício 1.4.** Prove o sequente  $\vdash (q \rightarrow r \rightarrow t) \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow r \rightarrow t$ .

**Exercício 1.5.** Prove o sequente  $\vdash (p \rightarrow q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow r$ .

**Exercício 1.6.** Prove o sequente  $\vdash (p \rightarrow q \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow p \rightarrow r)$ .

**Exercício 1.7.** Prove o sequente  $\vdash (p \rightarrow r) \rightarrow p \rightarrow q \rightarrow r$ .

**Exercício 1.8.** Prove o sequente  $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r \rightarrow t) \rightarrow p \rightarrow t$ .

Agora vamos adicionar novos construtores gramaticais, *i.e.* novos conectivos e as regras de inferência correspondentes. Assim, a nova gramática terá, além da implicação, a constante ( $\perp$ ), a negação ( $\neg$ ), a conjunção ( $\wedge$ ) e a disjunção ( $\vee$ ):

$$\varphi ::= p \mid \perp \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \quad (2)$$

A constante  $\perp$  é utilizada para representar a negação:  $\neg\varphi$  é o mesmo que  $\varphi \rightarrow \perp$ . Ou seja, temos duas maneiras distintas de escrever a negação, e portanto a gramática acima possui redundâncias. De

fato, veremos que existem outras redundâncias na gramática (2), mas elas são úteis porque simplificam a escrita das fórmulas.

A gramática (2) define as fórmulas da LP, e a partir dela consideraremos 3 sublógicas da LP: a minimal, a intuicionista e a clássica. Nesta seção estudaremos a Lógica Proposicional Minimal (LPM), que assim como no fragmento implicacional visto anteriormente, possui uma regra de introdução e uma regra de eliminação para cada um dos conectivos lógicos. Ou seja, uma regra de introdução e uma de eliminação para cada um dos construtores recursivos da gramática (2).

Apesar da gramática apresentada acima não incluir a bi-implicação, este é um conectivo bastante utilizado, e pode ser escrito em função dos outros conectivos:  $\varphi \leftrightarrow \psi$  é o mesmo que  $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ .

As regras da negação são análogas às regras da implicação, uma vez que uma negação, digamos  $(\neg\varphi)$  é definida como  $(\varphi \rightarrow \perp)$ .

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg\varphi} (\neg_i) \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash \neg\varphi \quad \Gamma_2 \vdash \varphi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \perp} (\neg_e)$$

Veremos posteriormente que apenas com a negação e implicação podemos expressar todos os outros conectivos apresentados na gramática (2), que portanto é uma gramática redundante. No entanto, esta redundância é interessante porque nos permite expressar fórmulas complexas de forma compacta.

A *regra de introdução da conjunção*, denotada por  $(\wedge_i)$ , nos diz o que precisamos fazer para construir uma prova de um sequente que possui uma conjunção na conclusão, isto é, um sequente da forma  $\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$ , onde  $\Gamma$  é um conjunto finito de fórmulas da LP, e  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são fórmulas da LP. A regra  $(\wedge_i)$  é dada pela seguinte regra de inferência:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \quad \Gamma_2 \vdash \varphi_2}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2} (\wedge_i)$$

ou seja, uma prova de  $\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$  é construída a partir de uma prova de  $\Gamma \vdash \varphi_1$  e de uma prova de  $\Gamma \vdash \varphi_2$ .

Existem duas regras de eliminação para a conjunção já que podemos extrair qualquer uma das componentes de uma conjunção:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1} (\wedge_{e1}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_2} (\wedge_{e2})$$

Estas duas regras podem ser representadas de forma mais concisa da seguinte forma:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}} (\wedge_e)$$

Usaremos o nome  $(\wedge_e)$  para designar a utilização da regra de eliminação da conjunção quando não quisermos especificar qual das regras  $(\wedge_{e1})$  ou  $(\wedge_{e2})$  foi utilizada.

**Exemplo 1.9.** Com as regras da conjunção já podemos fazer um exercício interessante: provar a comutatividade da conjunção, isto é, queremos construir uma prova para o sequente  $\varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi$ , onde  $\varphi$  e  $\psi$  são fórmulas quaisquer da LP. A construção da prova é feita inicialmente de baixo para cima com a aplicação da regra  $(\wedge_i)$ :

$$\frac{\frac{?}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi} \quad \frac{?}{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi}}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi} (\wedge_i)$$

Concluimos com a regra de eliminação da conjunção e o axioma:

$$\frac{\frac{\frac{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi \wedge \psi}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi} (\wedge_e) \quad \frac{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi \wedge \psi}{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi} (\wedge_e)}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi} (\wedge_i) \quad \frac{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi \wedge \psi}{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi \wedge \psi} (\text{Ax}) \quad \frac{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi \wedge \psi}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi} (\text{Ax})$$

**Exemplo 1.10.** Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  fórmulas quaisquer da LP. Considere o sequente  $\psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$ . Queremos provar que a partir de uma prova de  $\psi$  podemos provar qualquer implicação que tenha  $\psi$  como conclusão:

$$\frac{\frac{\frac{\varphi \vdash \varphi}{\psi, \varphi \vdash \varphi \wedge \psi} (\wedge_e) \quad \frac{\psi \vdash \psi}{\psi, \varphi \vdash \psi} (\wedge_e)}{\psi \vdash \varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i) \quad \frac{\varphi \vdash \varphi}{\psi, \varphi \vdash \varphi \wedge \psi} (\wedge_e) \quad \frac{\psi \vdash \psi}{\psi, \varphi \vdash \psi} (\wedge_e)$$

O sequente do exemplo anterior nos diz que podemos construir a prova de uma implicação a partir de uma prova do conseqüente desta implicação. Esta prova é utilizada com muita frequência em outras provas, e por esta razão promovemos este sequente ao *status* de regra derivada:

$$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i) \emptyset$$

Uma vez que uma bi-implicação corresponde a uma conjunção de duas implicações, ela pode ser decomposta com a regra de eliminação da conjunção:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \rightarrow \varphi_2} (\wedge_{e1}) \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_2 \rightarrow \varphi_1} (\wedge_{e2})$$

Vejam agora as regras para a disjunção. A *regra de introdução da disjunção* nos permite construir a prova de uma disjunção a partir da prova de qualquer uma das suas componentes:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} (\vee_{i1}) \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} (\vee_{i2})$$

Como no caso da regra de eliminação da conjunção podemos representar estas duas regras de forma mais compacta:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} \quad (\vee_i)$$

A regra de eliminação da disjunção nos permite construir a prova de uma fórmula, digamos  $\gamma$ , a partir de uma disjunção. Para isto, precisamos de duas provas distintas de  $\gamma$ , cada uma assumindo uma das componentes da disjunção separadamente:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \Gamma_2, \varphi_1 \vdash \gamma \quad \Gamma_3, \varphi_2 \vdash \gamma}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \vdash \gamma} \quad (\vee_e)$$

Observe como os contextos mudam em cada um dos sequentes que compõem esta regra.

**Exemplo 1.11.** Vamos mostrar que a disjunção é comutativa, ou seja, queremos construir uma prova para o sequente  $\varphi \vee \psi \vdash \psi \vee \varphi$ . A ideia aqui é utilizarmos a regra  $(\vee_e)$ . Para isto podemos instanciar  $\Gamma$  com o conjunto unitário contendo a fórmula  $\varphi \vee \psi$ . Em função da estrutura da regra  $(\vee_e)$ , precisamos construir duas provas distintas de  $\psi \vee \varphi$ : uma a partir de  $\varphi$ , e outra a partir de  $\psi$ . Podemos fazer isto com a ajuda da regra  $(\vee_i)$ :

$$\frac{\frac{(\text{Ax}) \quad \frac{}{\varphi \vee \psi \vdash \varphi \vee \psi}}{\varphi \vee \psi \vdash \varphi \vee \psi} \quad \frac{\frac{}{\varphi \vdash \varphi} (\text{Ax})}{\varphi \vdash \psi \vee \varphi} (\vee_i) \quad \frac{\frac{}{\psi \vdash \psi} (\text{Ax})}{\psi \vdash \psi \vee \varphi} (\vee_i)}{\varphi \vee \psi \vdash \psi \vee \varphi} (\vee_e)$$



**Exemplo 1.12.** Considere o sequente  $\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi$ . Como a fórmula do conseqüente é uma negação, vamos aplicar a regra de introdução da negação na construção de uma prova de baixo para cima, isto é, da raiz para as folhas da árvore:

$$\frac{?}{\frac{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \varphi \vdash \perp}{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi}} (\neg_i)$$

Agora, precisamos construir uma prova do absurdo, e portanto podemos tentar utilizar a regra ( $\neg_e$ ). Para isto precisamos escolher uma fórmula do contexto para fazer o papel de  $\varphi$  da regra 8 da Tabela 1. A princípio temos três opções:  $\varphi \rightarrow \psi$ ,  $\neg\psi$  e  $\varphi$ . A boa escolha neste caso é  $\neg\psi$  porque podemos facilmente provar  $\psi$  a partir deste contexto:

$$\begin{array}{c} \frac{(\neg_e) \frac{\frac{\frac{\varphi \rightarrow \psi \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \psi, \varphi \vdash \psi} (\text{Ax})}{\varphi \rightarrow \psi, \varphi \vdash \psi} (\text{Ax})}{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \varphi \vdash \perp} (\neg_e)}{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi} (\neg_i) \end{array}$$

Depois de concluída a prova é fácil entender o que queríamos dizer com boa escolha acima: Uma boa escolha é um caminho que vai nos permitir concluir uma prova. Mas como fazer uma boa escolha? Isto depende do problema a ser resolvido. Em alguns casos pode ser simples, mas em outros, bastante complicado. O ponto importante a compreender é que existem caminhos possíveis distintos na construção de provas da lógica proposicional, e muito deste processo depende da nossa criatividade.

O sequente que acabamos de provar ocorre com certa frequência em outras provas, assim como a regra derivada ( $\neg\neg_i$ ). As regras que são obtidas a partir das regras da Tabela 1 são chamadas de *regras derivadas*. Este é o caso da regra conhecida como *modus tollens* (MT) obtida a partir do sequente do exemplo anterior, onde cada antecedente é generalizado como uma premissa da regra:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma_2 \vdash \neg\psi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \neg\varphi} (\text{MT})$$

**Exemplo 1.13.** Considere o sequente  $\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ . Inicialmente, devemos observar que a fórmula que queremos provar é uma implicação, e portanto, o mais natural é tentar aplicar a regra ( $\rightarrow_i$ ), e em seguida aplicar (MT) (na construção de baixo para cima) para poder completar a prova:

$$\begin{array}{c} (\text{Ax}) \frac{\frac{\varphi \rightarrow \psi \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi} (\text{MT})}{\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi} (\rightarrow_i) \end{array}$$

A prova que acabamos de fazer é outro caso que aparece com frequência, e corresponde a uma regra conhecida como *contrapositiva*:

	Regras de introdução	Regras de eliminação
0	$\frac{}{\varphi \vdash \varphi} (Ax)$	
1	$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \quad \Gamma_2 \vdash \varphi_2}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2} (\wedge_i)$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}} (\wedge_e)$
2	$\frac{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} (\vee_i)$	$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \Gamma_2, \varphi_1 \vdash \gamma \quad \Gamma_3, \varphi_2 \vdash \gamma}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \vdash \gamma} (\vee_e)$
3	$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i)$	$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma_2 \vdash \varphi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \psi} (\rightarrow_e)$
4	$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \varphi} (\neg_i)$	$\frac{\Gamma_1 \vdash \neg \varphi \quad \Gamma_2 \vdash \varphi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \perp} (\neg_e)$

Tabela 1: Regras da Lógica Proposicional Minimal

$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \neg \neg \varphi} (\neg\neg_i)$	$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma_2 \vdash \neg \psi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \neg \varphi} (MT)$	$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i) \emptyset$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash \neg \psi \rightarrow \neg \varphi} (CP)$
--	--	---	--

Tabela 2: Regras derivadas da Lógica Proposicional Minimal

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash \neg \psi \rightarrow \neg \varphi} (CP)$$

A Tabela 1 resume todas as regras da LPM, isto é, as regras de introdução e eliminação dos conectivos lógicos apresentados na gramática 2. A Tabela 2 apresenta as regras derivadas provadas nos exemplos anteriores.

**Exercício 1.14.** *Seja  $\varphi$  uma fórmula da LP. Prove o sequente  $\varphi \vdash \neg \neg \varphi$ .*

**Exercício 1.15.** *Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  fórmulas da LP. Prove o sequente  $\varphi \rightarrow \psi \vdash (\neg \neg \varphi) \rightarrow (\neg \neg \psi)$ .*

**Exercício 1.16.** *Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  fórmulas da LP. Prove o sequente  $\neg \neg(\varphi \rightarrow \psi) \vdash (\neg \neg \varphi) \rightarrow (\neg \neg \psi)$ .*

**Exercício 1.17.** *Prove que a conjunção é associativa, isto é, prove o sequente  $(\varphi \wedge \psi) \wedge \rho \vdash \varphi \wedge (\psi \wedge \rho)$  onde  $\varphi$ ,  $\psi$  e  $\rho$  são fórmulas quaisquer da LP.*

**Exercício 1.18.** *Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  fórmulas quaisquer da LP. Prove os sequentes  $\neg \neg(\varphi \wedge \psi) \dashv \vdash (\neg \neg \varphi) \wedge (\neg \neg \psi)$ .*

**Exercício 1.19.** *Sejam  $\varphi$ ,  $\psi$  e  $\rho$  fórmulas quaisquer da LP. Prove que a disjunção é associativa, isto é, prove o sequente  $(\varphi \vee \psi) \vee \rho \vdash \varphi \vee (\psi \vee \rho)$ .*

**Exercício 1.20.** *Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  fórmulas da LP. Prove o sequente  $\varphi \rightarrow \neg \psi \vdash \psi \rightarrow \neg \varphi$ .*

**Exercício 1.21.** *Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  fórmulas da LP. Prove o sequente  $\vdash (((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$ .*

**Exercício 1.22.** *Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  fórmulas da LP. Prove o sequente  $\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\psi$ .*

**Exercício 1.23.** *Seja  $\varphi$  uma fórmula da LP. Construa uma prova para o sequente  $\neg\neg\neg\varphi \vdash \neg\varphi$ .*

**Exercício 1.24.** *Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  fórmulas da LP. Construa uma prova para o sequente  $\neg(\varphi \vee \psi) \vdash (\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$ .*

**Exercício 1.25.** *Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  fórmulas da LP. Construa uma prova para o sequente  $(\neg\varphi) \wedge (\neg\psi) \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$ .*

**Exercício 1.26.** *Sejam  $\varphi, \psi$  e  $\delta$  fórmulas da LP. Construa uma prova para o sequente  $\varphi \rightarrow \psi \vdash (\delta \vee \varphi) \rightarrow (\delta \vee \psi)$ .*

**Exercício 1.27.** *Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  fórmulas da LP. Construa uma prova para o sequente  $\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$ .*

**Exercício 1.28.** *Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  fórmulas da LP. Construa uma prova para o sequente  $\varphi \wedge \psi \vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ .*

**Exercício 1.29.** *Sejam  $\varphi$  e  $\gamma$  fórmulas da LP. Construa uma prova para os sequentes  $\neg(\varphi \vee \gamma) \vdash (\neg\varphi) \wedge (\neg\gamma)$  e  $(\neg\varphi) \wedge (\neg\gamma) \vdash \neg(\varphi \vee \gamma)$ .*

**Exercício 1.30.** *Sejam  $\varphi$  e  $\gamma$  fórmulas da LP. Construa uma prova para o sequente  $(\neg\varphi) \vee (\neg\gamma) \vdash \neg(\varphi \wedge \gamma)$ .*

**Exercício 1.31.** *Sejam  $\varphi$  e  $\gamma$  fórmulas da LP. Construa uma prova para o sequente  $\neg\neg(\varphi \wedge \gamma) \vdash (\neg\neg\varphi) \wedge (\neg\neg\gamma)$ .*

**Exercício 1.32.** *Sejam  $\varphi$  e  $\gamma$  fórmulas da LP. Construa uma prova para o sequente  $(\neg\neg\varphi) \wedge (\neg\neg\gamma) \vdash \neg\neg(\varphi \wedge \gamma)$ .*

**Exercício 1.33.** *Sejam  $\varphi, \psi$  e  $\gamma$  fórmulas da LP. Prove o sequente  $\varphi \vee (\psi \wedge \gamma) \vdash (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \gamma)$ .*

**Exercício 1.34.** *Sejam  $\varphi, \psi$  e  $\gamma$  fórmulas da LP. Prove o sequente  $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \gamma) \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \gamma)$ .*

**Exercício 1.35.** *Sejam  $\varphi, \psi$  e  $\gamma$  fórmulas da LP. Prove o sequente  $\varphi \wedge (\psi \vee \gamma) \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \gamma)$ .*

**Exercício 1.36.** *Sejam  $\varphi, \psi$  e  $\gamma$  fórmulas da LP. Prove o sequente  $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \gamma) \vdash \varphi \wedge (\psi \vee \gamma)$ .*

**Exercício 1.37.** *Seja  $\varphi$  uma fórmula da LP. Prove o sequente  $\vdash \neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ .*

**Exercício 1.38.** *Seja  $\varphi$  uma fórmula da LP. Prove o sequente  $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ .*

**Exercício 1.39.** *Sejam  $\varphi$  e  $\gamma$  fórmulas da LP. Construa uma prova para o sequente  $(\varphi \rightarrow \gamma) \wedge \neg(\varphi \wedge \gamma) \vdash \neg\varphi$ .*

**Exercício 1.40.** *Sejam  $\varphi, \psi$  e  $\gamma$  fórmulas da LP. Prove o sequente  $\varphi \leftrightarrow \psi, \psi \rightarrow \gamma, \neg\gamma \vdash (\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$ .*

## Referências

- [1] M. Ayala-Rincón and F. L. C. de Moura. *Applied Logic for Computer Scientists - Computational Deduction and Formal Proofs*. UTCS. Springer, 2017.
- [2] H. P. Barendregt. *The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics*. Number v. 103 in Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland ; Sole distributors for the U.S.A. and Canada, Elsevier Science Pub. Co, Amsterdam ; New York : New York, N.Y, rev. ed edition, 1984.
- [3] A. Church. An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory. *American Journal of Mathematics*, 58(2):345–363, 1936.
- [4] A. Church. A Formulation of the Simple Theory of Types. *journal of Symbolic Logic*, 5:56–68, 1940.
- [5] J. Roger Hindley. *Basic Simple Type Theory*. Number 42 in Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press, 1997.