A linguagem da LP

A solução do exercício proposto no final da aula anterior nos mostra que é possível ter a certeza de que C é honesto, enquanto que a nossa conclusão de que João fala francês (por ter morado 5 anos na França) pode ser falsa, ainda que pareça improvável. Neste curso estamos interessados nos fatos ou coisas que podemos concluir a partir de determinadas hipóteses de maneira precisa. Para isto precisaremos restringir o que popularmente chamamos de lógica para algo que possa ser estudado com o devido rigor científico. Mais precisamente, estudaremos o que se conhece como *lógica simbólica* ou *lógica matemática*, e iniciaremos pela *lógica proposicional* (LP).

A LP é uma lógica baseada na noção de **proposição**, e uma proposição é simplesmente uma sentença que pode ser qualificada como verdadeira ou falsa. São exemplos de proposição:

- $2+2 = 4$.
- $1+3 < 0$.
- 2 é um número primo.
- João tem 20 anos e Maria tem 22 anos.

Mas nem toda sentença é uma proposição. De fato, a sentença "Feche a porta!"não pode ser qualificada como verdadeira ou falsa, e portanto não é uma proposição. Algumas proposições podem ser divididas em proposições menores. Por exemplo, a proposição "João tem 20 anos e Maria tem 22 anos"é composta da proposição "João tem 20 anos"e da proposição "Maria tem 22 anos". Nenhuma das outras proposições apresentadas no exemplo acima pode ser dividida em proposições menores. Uma proposição que não pode ser dividida é um elemento básico utilizado na construção de proposições mais complexas, que chamaremos de *fórmula atômica*. Utilizaremos letras latinas minúsculas para representar fórmulas atômicas. Por exemplo, podemos utilizar a letra q para representar a proposição "Maria tem 22 anos", e a letra p para "João tem 20 anos". A proposição do exemplo acima é construída com a utilização do conectivo "E"(conjunção), que será representado pelo símbolo $\wedge$. Com esta simbologia, podemos codificar a proposição "João tem 20 anos e Maria tem 22 anos"pela fórmula $p \wedge q$. Vejamos então a gramática utilizada na construção das fórmulas da LP, que serão representadas por letras gregas minúsculas:

$$\varphi ::= p \mid \perp \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \to \varphi) \tag{1}$$

A gramática (1) define como as fórmulas da LP são construídas. São 6 construtores:

1. O primeiro denota uma variável proposicional, e caracteriza uma fórmula atômica, i.e. uma fórmula que não pode ser subdividida em uma fórmula menor.

2. O segundo construtor é uma constante que denota o absurdo ($\perp$), que também é uma fórmula atômica. O absurdo é utilizado para representar uma fórmula que tem valor de verdade "falso (F)". É importante observar que podemos associar a qualquer fórmula da LP apenas dois valores de verdade, a saber: verdadeiro (T) ou falso (F).

3. O terceiro construtor denota a negação e nos permite construir uma nova fórmula a partir de uma fórmula dada. Assim, dada uma fórmula φ, podemos construir a sua negação $(\neg\varphi)$. A semântica da negação é a que conhecemos intuitivamente: se uma fórmula φ é verdadeira (T) então sua negação é falsa (F), e vice-versa. Normalmente, representamos este fato via a seguinte tabela:

φ	$(\neg\varphi)$
T	F
F	T

4. O quarto construtor denota a conjunção e nos permite construir uma nova fórmula a partir de duas fórmulas dadas. Assim, dadas duas fórmulas φ_1 e φ_2, podemos construir a sua conjunção $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$. A semântica da conjunção também é a usual, isto é, a conjunção $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ é verdadeira somente quando φ_1 e φ_2 são simultaneamente verdadeiras:

φ_1	φ_2	$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

   Aqui é importante observar que a leitura da construção da conjunção na gramática 1 não diz que suas componentes são iguais (apesar da utilização do mesmo símbolo φ nas duas componenetes). Lembre-se que a leitura desta construção em 1 é: dadas duas fórmulas (não necessariamente iguais!), podemos construir a sua conjunção. Alternativamente, poderíamos ter escrito a gramática 1 da seguinte forma equivalente:

$$\varphi, \psi ::= p \mid \bot \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \wedge \psi) \mid (\varphi \vee \psi) \mid (\varphi \to \psi) \tag{2}$$

5. O quinto construtor denota a disjunção e, como no caso anterior, nos permite construir uma nova fórmula a partir de duas fórmulas dadas. Assim, dadas duas fórmulas φ_1 e φ_2, podemos construir a sua disjunção $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, cuja semântica é dual à semântica da conjunção: a disjunção $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ é falsa somente quando φ_1 e φ_2 são simultaneamente falsas.

φ_1	φ_2	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

6. O sexto construtor é a implicação. Assim, dadas duas fórmulas φ_1 e φ_2, podemos construir a sua implicação $(\varphi_1 \to \varphi_2)$ com a semântica dada na tabela abaixo.

   O sentido usual da implicação assume implicitamente uma relação de causa e efeito, ou causa e consequência no sentido de que o antecedente φ_1 é o que gera o consequente φ_2 como em "Se eu não beber água então ficarei desidratado". No entanto, o sentido da implicação na lógica é um pouco diferente pois tem como fundamento a *preservação da verdade*, que não necessariamente possui uma relação de causa e efeito. Por exemplo, a proposição "Se 2+2=4 então o dia tem 24 horas"é verdadeira, mas não existe relação causal entre a igualdade 2+2=4 e o fato de o dia ter 24 horas de duração.

Uma gramática como 1 (ou 2) nos fornece as regras sintáticas para a construção das fórmulas da LP. São quatro construtores recursivos (negação, conjunção, disjunção e implicação) também chamados de conectivos lógicos, e dois não recursivos.

Apesar da gramática apresentada acima não incluir a bi-implicação, este é um conectivo bastante utilizado. De fato, a bi-implicação pode ser construída a partir da implicação e da conjunção: $\varphi \leftrightarrow \psi$

φ_1	φ_2	$(\varphi_1 \to \varphi_2)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

é o mesmo que $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$. Como exercício construa a tabela verdade da bi-implicação e observe que $\varphi \leftrightarrow \psi$ é verdadeira somente quando φ e ψ possuem o mesmo valor de verdade. Adicionalmente, dizemos que duas fórmulas φ e ψ são **equivalentes** quando a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é sempre verdadeira.

Uma nomenclatura importante que classifica as fórmulas da LP é dada a seguir:

Tautologia	Uma fórmula que é sempre verdadeira, independentemente dos valores de verdade associados às suas variáveis.
Contradição	Uma fórmula que é sempre falsa, independentemente dos valores de verdade associados às suas variáveis.
Contingência	Uma fórmula que pode ser tanto verdadeira quanto falsa dependendo dos valores de verdade associados às suas variáveis.

As tautologias e as contradições são particularmente importantes, e possuem símbolos especiais para representá-las. Nas gramáticas 1 e 2 já vimos que a constante $\perp$ é o representante das contradições. As tautologias, por sua vez, podem ser representadas pelo símbolo $\top$.

Considere novamente o exercício da aula anterior:

> Considere uma ilha onde moram apenas dois tipos de pessoas: as honestas, e que portanto sempre falam a verdade; e as desonestas, que sempre mentem. Um viajante, ao passar por esta ilha encontra três moradores chamados A, B e C. O viajante pergunta para o morador A: "Você é honesto ou desonesto?" A responde algo incompreensível, e o viajante pergunta para B: "O que ele disse?" B então responde "Ele disse que é desonesto". Neste momento C se manifesta: "Não acredito nisto! Isto é uma mentira!". Questão: C é honesto ou desonesto?

Seria possível modelarmos este problema na linguagem da LP? A ideia aqui é tentarmos apresentar uma nova solução para este problema no contexto mais formal da LP. O ponto de partida é utilizar variáveis proposicionais para representar o fato de um morador ser honesto ou desonesto. Por exemplo, considere as variáveis proposicionais a seguir com a seguinte semântica:

- p_A: A é honesto

- p_B: B é honesto

- p_C: A é honesto

Consequentemente, a negação destas variáveis denota que o morador correspondente é desonesto. Considere agora o que disse o morador B: "Ele disse que é desonesto", quer dizer, o morador B disse que o morador A disse que era desonesto. Como codificar este fato por meio de uma fórmula da LP? Vamos iniciar considerando uma situação geral e mais simples. Digamos que o morador X tenha dito Y, isto é,

"X disse Y". Que fórmula da LP corresponde a este fato? Observe que, se X for honesto então o que ele disse é verdade, ou seja, Y é verdade, enquanto que se X for desonesto então Y é falso. Ou seja, os valores de verdade da variável proposicional p_X e da proposição que representa Y coincidem! Assim, podemos representar a afirmação "X disse C"pela fórmula $p_X \leftrightarrow Y$[1]. Voltando então ao nosso problema original, podemos agora representar o fato de que o morador B disse que o morador A disse que era desonesto pela fórmula $p_B \leftrightarrow (p_A \leftrightarrow (\neg p_A))$. O morador C por sua vez, disse que B mentiu, o que corresponde a fórmula $p_C \leftrightarrow (\neg p_B)$. Como podemos utilizar estas fórmulas para resolver este problema? Inicialmente, observe que a subfórmula $(p_A \leftrightarrow (\neg p_A))$ é uma contradição, ou seja, é equivalente a $\perp$. Portanto, a fórmula $p_B \leftrightarrow (p_A \leftrightarrow (\neg p_A))$ pode ser reescrita como $p_B \leftrightarrow \perp$, e isto significa que p_B é equivalente a uma contradição. Em outras palavras, p_B é sempre falsa, e portanto B é desonesto. Como p_B é sempre falsa, concluímos que $(\neg p_B)$ é sempre verdadeira. Logo, a fórmulas $p_C \leftrightarrow (\neg p_B)$ é equivalente a uma tautologia, de onde concluímos que p_C é uma tautologia, e portanto C é honesto. Alternativamente, podemos construir a tabela de verdade para as fórmulas que correspondem ao que cada morador disse:

	p_A	p_B	p_C	$p_A \leftrightarrow (\neg p_A)$	$\neg p_B$	$p_B \leftrightarrow (p_A \leftrightarrow (\neg p_A))$	$p_C \leftrightarrow (\neg p_B)$
1	T	T	T	F	F	F	F
2	T	T	F	F	F	F	T
3	T	F	T	F	T	T	T
4	T	F	F	F	T	T	F
5	F	T	T	F	F	F	F
6	F	T	F	F	F	F	F
7	F	F	T	F	T	T	T
8	F	F	F	F	T	T	F

Agora devemos observar nas duas últimas colunas (que correspondem ao que B e C disseram, respectivamente), as linhas em que estas fórmulas são simultaneamente verdadeiras. Ou seja, estamos considerando as linhas que correspondem às informações dadas no enunciado da questão. Assim, as fórmulas $p_B \leftrightarrow (p_A \leftrightarrow (\neg p_A))$ e $p_C \leftrightarrow (\neg p_B)$ são simultaneamente verdadeiras nas linhas 3 e 7. Nestas linhas temos que C é honesto, B é desonesto e nada se pode afirmar sobre A, já que na linha 3 A seria honesto e na linha 7, desonesto.

- **Exercício**: Em uma ilha moram apenas dois tipos de habitantes: os honestos, que sempre falam a verdade; e os desonestos, que sempre mentem. Você encontra dois habitantes desta ilha, digamos Carlos e Augusto. Carlos afirma que Augusto é desonesto. Augusto diz: "Carlos e eu somos honestos". Você consegue determinar qual dos dois é honesto e qual é desonesto? Resolva este problema usando a linguagem da LP.

[1] Para simplificar a explicação, estamos identificando Y (o que X disse) com a fórmula que codifica Y, mas note que isto é um abuso de linguagem.