Regras derivadas para Dedução Natural na LPC

A Tabela 1 apresentada na seção anterior pode ser vista como uma caracterização da LPC no sentido que as regras ali apresentadas são completas. Ou seja, toda prova na LPC pode ser feita utilizando-se apenas estas regras. No entanto, existem outras caracterizações possíveis. Por exemplo, poderíamos substituir a regra (PBC) da Tabela 1 pela regra da eliminação da dupla negação:

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg\neg_e)$$

Isto quer dizer que as regras (PBC) e $(\neg\neg_e)$ podem ser trocadas uma pela outra na LPC? Isto mesmo! As duas têm o mesmo poder de expressividade, ou em outras palavras, uma pode ser provada a partir da outra. Como seria a prova de $(\neg\neg_e)$ assumindo as regras da Tabela 1? Isto é fácil! Veja a árvore de dedução correspondente a esta prova:

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg\varphi \qquad [\neg\varphi]^u}{\bot}\ (\neg_e)}{\varphi}\ (PBC)\ u$$

E o contrário? Considere agora a versão da Tabela 1 onde a regra (PBC) foi removida, e no lugar dela colocamos $(\neg\neg_e)$:

regras de introdução	regras de eliminação
$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi_{i\in\{1,2\}}}\ (\wedge_e)$
$\dfrac{\varphi_{i\in\{1,2\}}}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\ (\vee_i)$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{matrix}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \chi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi]^v\\ \vdots\\ \chi\end{matrix}}{\chi}\ (\vee_e)\ u, v$
$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i) u$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to_e)$
$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi}\ (\neg_i)\ u$	$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg_e)$
	$\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg\neg_e)$

Como seria a prova de (PBC)? Observe que a regra (PBC) corresponde ao sequente $\neg\varphi \to \bot \vdash \varphi$. Ou seja, assumindo a implicação $\neg\varphi \to \bot$, queremos construir uma prova de φ. Ah! Esta também é fácil porque podemos assumir $\neg\varphi$ para conseguirmos utilizar a implicação dada como hipótese com a regra $(\to_e)$ (*modus ponens*). Isto nos permitirá construir uma prova do absurdo. Neste momento, podemos usar a regra de introdução da negação $(\neg_i)$ que nos permitirá descartar a fórmula que assumimos como suposição, e concluímos com $(\neg\neg_e)$.

- **Exercício**: Escreva a árvore de dedução correspondente ao raciocínio apresentado acima.

Antes de prosseguirmos com outras regras derivadas da LPC, será importante saber que existem sub-lógicas da LPC que são importantes do ponto de vista filosófico e computacional. Não entraremos nos detalhes filosóficos aqui, mas tentaremos explicar as motivações computacionais para o estudo de lógicas mais simples do que a LPC. Se simplesmente retiramos a regra (PBC) da Tabela 1, temos a chamada *lógica minimal* (LM):

Tabela 2: Regras para DN na LM

regras de introdução	regras de eliminação
$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi_{i \in \{1,2\}}}\ (\wedge_e)$
$\dfrac{\varphi_{i \in \{1,2\}}}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\ (\vee_i)$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]^v \\ \vdots \\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\vee_e)\ u, v$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i) u$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to_e)$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ (\neg_i)\ u$	$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg_e)$

Por conter menos regras que a LPC, a LM também possui menos teoremas. De fato, na LPC não é possível provar a eliminação da dupla negação, ou prova por contradição, porque se fosse possível LPC e LM seriam a mesma coisa. Mas, existem outras coisas interessantes que também não podem ser provadas na LM, como a *lei do terceiro excluído*, que diz que $\varphi \vee \neg\varphi$, para qualquer fórmula φ da lógica proposicional.

Existe uma lógica particularmente interessante para a Computação entre a LM e a LPC, que é chamada de *lógica proposicional intuicionista* (LPI). A LPI é importante em Computação porque suas provas são construtivas. Informalmente, significa que precisamos *construir* os objetos que satisfazem as propriedades que estamos provando. Detalharemos mais este ponto posteriormente. A questão que precisamos responder agora é: quais são as regras da LPI? As regras da LPI consistem das regras da LM com uma regra adicional que é mais fraca do que (PBC), conhecida como *eliminação do absurdo intuicionista*:

$$\frac{\bot}{\varphi}\ (\bot_e)$$

A regra $(\bot_e)$ diz que a partir de uma prova do absurdo, podemos concluir qualquer coisa. Esta regra é mais fraca do que (PBC) porque pode ser vista como um pedaço de (PBC). De fato, se removermos a derivação que antecede o absurdo em (PBC), obtemos $(\bot_e)$. Outra maneira de ver isto é considerando que a utilização de (PBC) consiste em uma derivação de uma fórmula φ a partir da hipótese $\neg\varphi \to \bot$ em um dado contexto Γ (i.e. um conjunto finito de fórmulas da lógica proposicional). Na forma de sequente temos $\Gamma, \neg\varphi \to \bot \vdash \varphi$, enquanto que a eliminação do absurdo intuicionista corresponde ao sequente

$\Gamma, \bot \vdash \varphi$. Formalmente, podemos provar o sequente $\bot \vdash \varphi$, a partir de (PBC) (ou seja, usando as regras da Tabela 1):

$$\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^u \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^v \qquad \bot}{\neg\varphi \wedge \bot}\,(\wedge_i)}{\bot}\,(\wedge_e)}{\neg\varphi \to \bot}\,(\to_i)v}{\bot}\,(\to_e)}{\varphi}\,(PBC)\;u$$

A propósito, a regra (PBC) também é conhecida como *eliminação do absurdo clássico*. Resumindo, a tabela 3 contém as regras da LPI.

Tabela 3: Regras para DN na LPI

regras de introdução	regras de eliminação
$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\,(\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi_{i\in\{1,2\}}}\,(\wedge_e)$
$\dfrac{\varphi_{i\in\{1,2\}}}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\,(\vee_i)$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]^v\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\,(\vee_e)\;u, v$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\,(\to_i)u$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\,(\to_e)$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\,(\neg_i)\;u$	$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\,(\neg_e)$
	$\dfrac{\bot}{\varphi}\,(\bot_e)$

Considerando a LPI, podemos provar diversas equivalências interessantes que nos permitirão apresentar, por exemplo, diversas caracterizações distintas para a LPC como proposto no exercício a seguir.

- **Exercício**: A lógica clássica é obtida acrescentando-se qualquer uma das seguintes regras à lógica proposicional intuicionista:

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg\phi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\phi}\ (PBC)\ u \qquad\qquad \dfrac{}{\phi \vee \neg\phi}\ (\text{LEM})$$

$$\dfrac{}{((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi}\ (\text{LP}) \qquad\qquad \dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg\neg_e)$$

$$\dfrac{\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)}{\phi \vee \psi}\ (R_1) \qquad\qquad \dfrac{\phi \to \psi}{\neg\phi \vee \psi}\ (R_2)$$

A regra (LP) é denominada Lei de Peirce. Demonstre que estas seis regras são equivalentes entre si na LPI, isto é, podemos provar qualquer uma destas regras na LPI assumindo qualquer outra.

Observação: Anteriormente, provamos a equivalência entre (PBC) e $(\neg\neg_e)$ na LM, e portanto esta equivalência continua válida na LPI porque a LM é uma sublógica da LPI. Ou seja, todo teorema da LM é também um teorema da LPI, mas o inverso não vale. Da mesma forma, todo teorema da LPI é também um teorema da LPC.