Indução Estrutural

As gramáticas 1 e 2 nos dizem como as fórmulas da LP podem ser construídas. Observe em particular os construtores recursivos destas gramáticas: por exemplo, a negação de uma fórmula é construída a partir de outra fórmula já construída; a conjunção, a disjunção ou a implicação de duas fórmulas se constroem a partir de duas fórmulas já construídas. As árvores de derivação das provas acima também são definidas a partir de uma gramática recursiva: uma árvore é um nó, ou construímos uma nova árvore a partir de uma ou mais árvores já construídas. Nesta seção estudaremos como provar propriedades de elementos de conjuntos definidos recursivamente, como as fórmulas da LP ou as árvores de derivação citadas anteriormente. Vejamos inicialmente um exemplo bem familiar, o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, que pode ser definido pela gramática a seguir:

$$n ::= 0 \mid S\ n \tag{6}$$

A gramática 6 possui dois construtores: 0 e S. O primeiro diz que 0 é um número natural, e o segundo diz que a partir de um natural já construído, digamos n, podemos construir um outro natural, a saber, $S\ n$, ou seja, o sucessor de n. Muito bem, agora considere uma propriedade qualquer dos números naturais. Por exemplo, a que diz que a soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2. Como podemos provar esta propriedade? Isto mesmo, por indução! O que diz mesmo o princípio de indução para os números naturais? Diz que se uma propriedade P vale para 0 (base da indução), e se, sabendo que P vale para um natural arbitrário k, podemos provar que ela vale também para $S\ k$ (o sucessor de k)[2] (passo indutivo) então podemos concluir que P vale para todos os números naturais. Esquematicamente, podemos apresentar este princípio como a seguir:

$$\frac{P\ 0 \qquad \forall k, P\ k \Longrightarrow P\ (S\ k)}{\forall n, P\ n}$$

Podemos então resolver o problema acima da seguinte forma: a propriedade que diz que "a soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2"vale trivialmente para 0 (a soma dos 0 primeiros números ímpares é igual a 0^2). Agora suponha que a soma dos k primeiros números ímpares seja igual a k^2. O \$k+1\$-ésimo número ímpar é igual a $2.k+1$ (por que?), e portanto a soma dos $k+1$ primeiros números ímpares é $k^2+2.k+1 = (k+1)^2$, como queríamos provar. Como exercício, reescreva esta prova na forma de árvore.

Como seria o princípio indutivo para as gramáticas 1 e 2? Este princípio é análogo ao apresentado acima para os naturais considerando que temos uma base de indução para cada construtor não recursivo, e um passo indutivo para cada construtor recursivo. Como os naturais têm apenas um construtor não recursivo (zero), e um recursivo (sucessor), o princípio de indução tem apenas uma base de indução e um passo indutivo. Já a gramática 1 que define as fórmulas da LP, possui dois construtores não recursivos (variáveis proposicionais e a constante $\perp$) e quatro construtores recursivos (negação, conjunção, disjunção e implicação), e portanto o princípio indutivo correspondente terá a seguinte forma, considerando uma propriedade Q qualquer das fórmulas da LP:

[2]Note que o sucessor de k pode ser escrito como $S\ k$ ou $k+1$.

$$\frac{(Q\ p) \qquad (Q\ \bot) \qquad (\forall \varphi_1, Q\ \varphi \Longrightarrow Q\ (\neg \varphi_1)) \qquad (\forall \varphi_1, Q\ \varphi_1 \qquad \forall \varphi_2, Q\ \varphi_2 \Longrightarrow Q\ (\varphi_1 \star \varphi_2))}{\forall \varphi, Q\ \varphi}$$

onde $\star \in \{\land, \lor, \to\}$. Chamamos o princípio de indução construído a partir de uma gramática recursiva de *indução estrutural*.

Como exemplo, considere o seguinte exercício:

> Prove, sem utilizar tabela de verdade, que para qualquer fórmula φ, existe uma fórmula φ' equivalente a φ construída apenas com os conectivos $\lor$ e $\neg$, e com os símbolos proposicionais que ocorrem em φ.

Dizemos que duas fórmulas φ e ψ da LP são equivalentes se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia. Provaremos este exercício por indução estrutural, isto é, indução na estrutura de φ:

- Se φ é uma variável proposicional ou a constante $\bot$ então tome $\varphi' = \varphi$.

- Se $\varphi = \neg \psi$ então, por hipótese de indução, existe uma fórmula ψ' equivalente a ψ construída apenas com os conectivos $\lor$ e $\neg$, e os símbolos proposicionais que ocorrem em ψ. Neste caso, basta tomar $\varphi' = \neg \psi'$, e estamos prontos.

- Se $\varphi = \psi_1 \lor \psi_2$ então, por hipótese de indução, existem fórmulas $\psi_i'(i = 1, 2)$, equivalentes respectivamente a $\psi_i(i = 1, 2)$, e construídas apenas com os conectivos $\lor$ e $\neg$, e os símbolos proposicionais que ocorrem em $\psi_i(i = 1, 2)$. Neste caso, basta tomar $\varphi' = \psi_1' \lor \psi_2'$ e estamos prontos.

- Se $\varphi = \psi_1 \land \psi_2$ então, por hipótese de indução, existem fórmulas $\psi_i'(i = 1, 2)$, equivalentes respectivamente a $\psi_i(i = 1, 2)$, e construídas apenas com os conectivos $\lor$ e $\neg$, e os símbolos proposicionais que ocorrem em $\psi_i(i = 1, 2)$. Por um exercício da lista sabemos que $\psi_1 \land \psi_2 \dashv\vdash \neg(\neg \psi_1 \lor \neg \psi_2)$. Então basta tomar $\varphi' = \neg(\neg \psi_1' \lor \neg \psi_2')$, e estamos prontos.

- Por fim, se $\varphi = \psi_1 \to \psi_2$ então, por hipótese de indução, existem fórmulas $\psi_i'(i = 1, 2)$, equivalentes respectivamente a $\psi_i(i = 1, 2)$, e construídas apenas com os conectivos $\lor$ e $\neg$, e os símbolos proposicionais que ocorrem em $\psi_i(i = 1, 2)$. Por um exercício da lista sabemos que $\psi_1 \to \psi_2 \dashv\vdash (\neg \psi_1) \lor \psi_2$. Então basta tomar $\varphi' = (\neg \psi_1') \lor \psi_2'$ e estamos prontos.

Agora é a sua vez! Resolva o exercício a seguir:

> Prove, sem utilizar tabela de verdade, que para qualquer fórmula φ, existe uma fórmula φ' equivalente a φ construída apenas com os conectivos $\to$ e $\neg$, e com os símbolos proposicionais que ocorrem em φ.