Introdução à Lógica de Primeira Ordem (LPO)

Nesta seção vamos em um certo sentido estender a Lógica Proposicional (LP) para ganhar em poder de expressividade. A limitação dada pela LP consiste na impossibilidade de quantificar de forma explícita sobre elementos de um conjunto. Por exemplo, podemos expressar a sentença "Todo mundo gosta de Matemática"na LP via uma variável proposicional, mas esta representação não expressa a quantificação universal "Todo mundo"aí existente. O mesmo vale para uma sentença da forma "Existe um número natural que não é primo". A lógica que nos permitirá expressar este tipo de quantificação (tanto existencial quanto universal) é conhecida como *Lógica de Primeira Ordem* (LPO), ou *Lógica de Predicados*.

Como é a gramática da LPO? Isto é, qual a linguagem que temos agora que vai nos permitir expressar quantificação universal e existencial? Inicialmente, precisamos representar os elementos que podem ser quantificados, que chamaremos de *termos* e são representados pela seguinte gramática:

$$t ::= x \mid f(t, \ldots, t) \tag{7}$$

ou seja, os termos são construídos a partir de variáveis (no sentido usual da palavra em Matemática) e, funções com uma certa aridade (i.e número de argumentos) dada. Observe que os termos vão representar os elementos do conjunto sobre o qual podemos quantificar. Por exemplo, considere o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Neste caso, as variáveis representam números naturais, e exemplos de funções são: sucessor (aridade 1), soma (aridade 2), etc. As fórmulas da LPO utilizam os mesmos conectivos da LP e são definidas pela seguinte gramática:

$$\varphi ::= p(t, \ldots, t) \mid \bot \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \to \varphi) \mid \exists_x \varphi \mid \forall_x \varphi \tag{8}$$

onde o primeiro construtor representa uma fórmula atômica, e os dois últimos representam, respectivamente, a quantificação existencial e universal. Note que as fórmulas atômicas representam fórmulas que não podem ser decompostas, e que têm termos como argumentos. Em uma fórmula atômica da forma $p(t_1, \ldots, t_n)$, p é um *predicado* de aridade n, e $t_1, \ldots, t_n$ são termos. A LPO é a lógica utilizada no dia a dia dos matemáticos, ainda que de maneira informal.

- **Exercício**: Baseado no que foi estudado sobre indução estrutural na LP, sabemos como gerar princípios de indução para gramáticas recursivas como 8. De fato, no caso dos números naturais temos a gramática:

  $$n ::= 0 \mid S\ n$$

  e o princípio de indução:

$$\frac{P\ 0 \qquad\qquad \forall k, P\ k \Longrightarrow P\ (S\ k)}{\forall n, P\ n}$$

Para a gramática da LP:

$$\varphi ::= p \mid \bot \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \to \varphi)$$

o princípio gerado foi:

$$\frac{(Q\ p) \qquad (Q\ \bot) \qquad (\forall \varphi_1, Q\ \varphi \Longrightarrow Q\ (\neg\varphi_1)) \qquad (\forall \varphi_1, Q\ \varphi_1 \wedge \forall \varphi_2, Q\ \varphi_2 \Longrightarrow Q\ (\varphi_1 \star \varphi_2))}{\forall \varphi, Q\ \varphi}$$

onde $\star \in \{\wedge, \vee, \to\}$.

Considerando a gramática da LPO

$$\varphi ::= p(t, \ldots, t) \mid \bot \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \to \varphi) \mid \exists_x \varphi \mid \forall_x \varphi$$

escreva o princípio de indução correspondente.