Dedução Natural na LPO

O sistema de DN na LPO possui as mesmas regras utilizadas no caso proposicional, mas agora aplicadas a fórmulas da LPO, e adicionalmente temos as regras de introdução e eliminação para os quantificadores que apresentamos a seguir.

A regra de introdução do quantificador universal permite a construção de uma prova de uma fórmula da forma $\forall_x \varphi$, ou seja, queremos concluir que a propriedade φ é satisfeita por qualquer elemento x do domínio. Mas o que precisamos para garantir que todo elemento x do domínio tenha a propriedade φ? Uma maneira seria tentar a construção individual de cada uma destas provas, ou seja, suponha que o domínio seja o conjunto $\{x_1, x_2, \ldots\}$ que pode ser finito ou infinito, e considere uma prova de $\varphi(x_1)$, isto é, uma prova de que x_1 satisfaz a propriedade φ. Seria possível repetir esta prova para x_2, x_3, e assim sucessivamente? Se pudermos repetir a mesma prova para todos os elementos do domínio então certamente podemos concluir $\forall_x \varphi$. Para que uma generalização desta forma seja possível precisamos que a prova de $\varphi(x_1)$ não dependa de hipótese que assuma alguma informação sobre x_1.

$$\frac{\varphi[x/x_0]}{\forall_x \varphi}\ (\forall_i)$$ se a prova de $\varphi[x/x_0]$ não depende de hipótese não-descartada que contenha x_0.

A regra de eliminação do quantificador universal nos permite instanciar a variável quantificada universalmente x com qualquer elemento t do domínio.

$$\frac{\forall_x \varphi}{\varphi[x/t]}\ (\forall_e)$$

A analogamente, a regra de introdução do quantificador existencial nos permite concluir que existe um elemento que satisfaz a propriedade φ a partir da prova de que algum elemento do domínio, digamos t, satisfaça a propriedade φ.

$$\frac{\varphi[x/t]}{\exists_x \varphi}\ (\exists_i)$$

Por fim, a regra de eliminação do quantificador existencial é dada como a seguir:

$$\frac{\exists_x \varphi \qquad \begin{array}{c}[\varphi[x/x_0]]^u \\ \vdots \\ \gamma\end{array}}{\gamma}\ (\exists_e)\ u$$ onde x_0 é uma variável nova que não ocorre em γ.

Nesta regra provamos γ a partir de uma prova de $\exists_x \varphi$, e de uma prova de γ a partir da suposição $\varphi[x/x_0]$. Ou seja, como temos uma prova de $\exists_x \varphi$, então temporariamente assumimos que x_0 (um novo elemento que, portanto, não pode ter sido utilizado antes) satisfaz a propriedade φ. Se a partir desta suposição pudermos provar uma fórmula, digamos γ, que não dependa de x_0 então podemos concluir γ após descartar a suposição $\varphi[x/x_0]$.