Universidade de Brasília - Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação
**Lógica Computacional 1 - (2021/1)**

6 de setembro de 2021

# Lista: Lógica Proposicional Minimal, Intuicionista e Clássica - Dedução Natural (Gabarito)

1. Nos seguintes exercícios use a prova por indução na estrutura das fórmulas.

   (a) Demonstre que uma fórmula bem formada é balanceada, no sentido de que o número de parênteses abertos "("é igual ao de parênteses fechados ")", isto é, $|\varphi|_( = |\varphi|_)$, para uma fórmula $\varphi$ qualquer.

   **Solução** A prova é por indução em $\varphi$. Consideramos cada um dos possíveis construtores para fórmulas:

   BI Se $\varphi$ for uma constante ou variável proposicional, então a propriedade vale, uma vez que neste caso $\varphi$ não possui parênteses.

   PI.a Se $\varphi = (\varphi_1 \star \varphi_2)$, onde $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ então por hipótese de indução $|\varphi_1|_( = |\varphi_1|_)$ e $|\varphi_2|_( = |\varphi_2|_)$, logo $|\varphi|_( = |(\varphi_1 \star \varphi_2)|_( = 1 + |\varphi_1|_( + |\varphi_2|_( \overset{h.i.}{=} 1 + |\varphi_1|_) + |\varphi_2|_) = |(\varphi_1 \star \varphi_2)|_) = |\varphi|_)$.

   PI.b Se $\varphi = (\neg\varphi_1)$ então por hipótese de indução $|\varphi_1|_( = |\varphi_1|_)$, logo $|\varphi|_( = |(\neg\varphi_1)|_( = 1 + |\varphi_1|_( \overset{h.i.}{=} 1 + |\varphi_1|_) = |(\neg\varphi_1)|_) = |\varphi|_)$.

   (b) Demonstre que para todo prefixo $s$ de uma fórmula bem formada $\varphi$, vale $|s|_( \geq |s|_)$.

   **Solução** A prova é por indução em $\varphi$. Consideramos cada um dos possíveis construtores para fórmulas:

   BI Se $\varphi$ for uma constante ou variável proposicional, então os possíveis prefixos de $\varphi$ são a palavra vazia ou $\varphi$. Em ambos os casos, temos que $|s|_( = 0 = |s|_)$, e portanto $|s|_( \geq |s|_)$.

PI.a Se $\varphi = (\neg\varphi_1)$ então, por hipótese de indução, para qualquer prefixo $s'$ de $\varphi_1$ temos que $|s'|_( \geq |s'|_)$. Adicionalmente, os possíveis prefixos de $\varphi$ são $\epsilon, (, (\neg s'$, para $s'$ prefixo de $\varphi_1$, ou $\varphi$. Nos dois primeiros casos, claramente temos que $|s|_( \geq |s|_)$; no último caso, por (a) $|\varphi|_( = |\varphi|_)$. Se $s = (\neg s'$ então $|s|_( = 1 + |s'|_( \overset{h.i.}{\geq} 1 + |s'|_) > |s'|_) = |s|_)$, e portanto $|s|_( \geq |s|_)$.

PI.b Se $\varphi = (\varphi_1 \star \varphi_2)$, onde $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ então por hipótese de indução temos que se $s_i$ é um prefixo de $\varphi_i$ então $|s_i|_( \geq |s_i|_)$ $(i \in \{1, 2\})$. Os possíveis prefixos de $\varphi$ são da forma $\epsilon, (s_1, (\varphi_1 \star s_2$ e $\varphi$. No primeiro e no último casos, o resultado é trivial e consequência de (a), respectivamente. Se $s = (s_1$ então $|s|_( = 1 + |s_1|_( \overset{h.i.}{\geq} 1 + |s_1|_) > |s_1|_) = |s|_)$, e portanto $|s|_( \geq |s|_)$. Se $s = (\varphi_1 \star s_2$, sempre que $|\varphi_1|_( = |\varphi_1|_)$ por (a), então $|s|_( = 1 + |\varphi_1|_( + |s_2|_( = 1 + |\varphi_1|_) + |s_2|_( \overset{h.i.}{\geq} 1 + |\varphi_1|_) + |s_2|_) > |\varphi_1|_) + |s_2|_) = |s|_)$. Logo, $|s|_( \geq |s|_)$.

(c) Demonstre que a palavra vazia não é uma fórmula.

**Solução**

Fórmulas da lógica proposicional são construídas de acordo com a seguinte gramática:

$$\varphi ::= \bot \mid \top \mid p \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi)$$

Desta forma, qualquer fórmula possui pelo menos um símbolo, e portanto a palavra vazia não é uma fórmula. Formalmente, como nos casos precedentes, também se procede por indução em $\varphi$:

BI Constantes ou variáveis proposicionais não são a palavra vazia.

PI.a Se $\varphi = (\neg\varphi_1)$, por h.i. $\varphi_1$ não é a palavra vazia e consequentemente, $\varphi$ não pode ser a palavra vazia.

PI.b Se $\varphi = (\varphi_1 \star \varphi_2)$, para $\star \in \{\wedge, \vee, to\}$, por h.i. $\varphi_1$ e $\varphi_2$ não são a palavra vazia e consequentemente, $\varphi$ não pode ser a palavra vazia.

(d) Demonstre que uma fórmula bem formada não tem prefixos próprios que são também fórmulas: Se $\varphi$ é uma fórmula bem formada e $s$

é prefixo próprio de $\varphi$ então $s$ não pode ser uma fórmula bem formada.

**Solução** Consideramos cada um dos possíveis construtores para fórmulas:

- Se $\varphi$ for uma constante ou variável proposicional então a propriedade vale, uma vez que o único prefixo próprio possível de $\varphi$ é a palavra vazia, que por (c), não é uma fórmula.
- Se $\varphi = (\neg\varphi_1)$ então os possíveis prefixos próprios de $\varphi$ são $\epsilon, ($ e $(\neg s'$, onde $s'$ é um prefixo de $\varphi_1$. O primeiro caso é consequência de (c). O segundo caso se obtem de (a), sempre que fórmulas bem formadas são balanceadas, mas $|(|_( = 1 > 0 = |(|_)$. Para $s = (\neg s'$, da prova de (b) temos que $|(\neg s'|_( > |(\neg s'|_)$; assim, novamente por (a) $(\neg s'$ não pode ser uma fórmula bem formada.
- Se $\varphi = (\varphi_1 \star \varphi_2)$, onde $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ então os possíveis prefixos próprios de $\varphi$ são $\epsilon, (s_1$ e $(\varphi_1 \star s_2$, onde $s_i$ é prefixo de $\varphi_i$ $(i \in \{1, 2\})$. No primeiro caso $\epsilon$ no é fórmula de (c). Para o segundo caso usamos (a) como no item anterior: $|(s_1|_( > |(s_1|_)$, da prova de (b), assim $(s_1$ não pode ser uma fórmula bem formada. Se $s = (\varphi_1 \star s_2$, novamente da prova de (b) temos que $|(\varphi_1 \star s_2|_( > |(\varphi_1 \star s_2|_)$; assim por (a) $(\varphi_1 \star s_2$ não pode ser uma fórmula bem formada.

==========questao2

2. "Toda fórmula satisfatível é tautológica." Esta afirmação está correta? Justifique.

   **Solução** Não está, pois existem fórmulas que são satisfatíveis e que não são tautologias. Por exemplo, $a \rightarrow b$ satisfatível porque $I(a \rightarrow b) = T$ para a interpretação $I$ tal que $I(a) = I(b) = T$. No entanto, para a interpretação $I'$ tal que $I'(a) = T$ e $I'(b) = F$, temos que $I'(a \rightarrow b) = F$, e portanto $a \rightarrow b$ não é tautologia.

   ==========questao3

3. Construa a tabela de verdade e verifique se as fórmulas a seguir são tautologias, contradições ou contingências. Adicionalmente classifique-as como satisfatíveis ou insatisfatíveis:

(a) $\psi \to (\phi \to (\phi \to (\psi \to \phi)))$

**Solução** Tautologia, e portanto satisfatível.

| $\phi$ | $\psi$ | $\psi \to \phi$ | $\phi \to (\psi \to \phi)$ | $\phi \to (\phi \to (\psi \to \phi)$ | $\psi \to (\phi \to (\phi \to (\psi \to \phi)))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| F | F | T | T | T | T |
| F | T | T | T | T | T |
| T | F | F | F | F | T |
| T | T | T | T | T | T |

(b) $(\phi \to \psi) \to ((\delta \to \gamma) \to (\phi \wedge \delta \to \psi \wedge \gamma))$

**Solução** Contingência, e portanto satisfatível.

| $\phi$ | $\psi$ | $\delta$ | $\gamma$ | $\phi \to \psi$ | $\delta \to \gamma$ | $\phi \wedge \delta$ | $\psi \wedge \gamma$ | $\phi \wedge \delta \to \psi \wedge \gamma$ | $(\delta \to \gamma) \to (\phi \wedge \delta \to \psi \wedge \gamma)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | F | F | F | T | T | F | F | T | T |
| F | F | F | T | T | T | F | F | T | T |
| F | F | T | F | T | F | F | F | T | T |
| F | F | T | T | T | T | F | F | T | T |
| F | T | F | F | T | T | F | F | T | T |
| F | T | F | T | T | T | F | T | T | T |
| F | T | T | F | T | F | F | F | T | T |
| F | T | T | T | T | T | F | T | T | T |
| T | F | F | F | F | T | F | F | T | T |
| T | F | F | T | F | T | F | F | T | T |
| T | F | T | F | F | F | T | F | F | T |
| T | F | T | T | F | T | T | F | F | F |
| T | T | F | F | T | T | F | F | T | T |
| T | T | F | T | T | T | F | T | T | T |
| T | T | T | F | T | F | T | F | F | T |
| T | T | T | T | T | T | T | T | T | T |

(c) $\phi \to \neg\phi$ **Solução** Contingência, e portanto satisfatível.

| $\phi$ | $\neg\phi$ | $\phi \to \neg\phi$ |
|---|---|---|
| F | T | T |
| T | F | F |

(d) $(\phi \wedge \psi) \to (\psi \vee \phi)$ **Solução** Tautologia, e portanto satisfatível.

| $\phi$ | $\psi$ | $\phi \wedge \psi$ | $\psi \vee \phi$ | $(\phi \wedge \psi) \to (\psi \vee \phi)$ |
|---|---|---|---|---|
| F | F | F | F | T |
| F | T | F | T | T |
| T | F | F | T | T |
| T | T | T | T | T |

(e) $((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \to \delta)) \wedge (\neg\phi \vee \delta)$

**Solução** Contingência, e portanto satisfatível.

| $\phi$ | $\psi$ | $\delta$ | $\neg\phi$ | $\phi \wedge \psi$ | $\phi \to \delta$ | $\neg\phi \vee \delta$ | $(\phi \wedge \psi) \vee (\phi \to \delta)$ | $((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \to \delta)) \wedge (\neg\phi \vee \delta)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | F | F | T | F | T | T | T | T |
| F | F | T | T | F | T | T | T | T |
| F | T | F | T | F | T | T | T | T |
| F | T | T | T | F | T | T | T | T |
| T | F | F | F | F | F | F | F | F |
| T | F | T | F | F | T | T | T | T |
| T | T | F | F | T | F | F | T | F |
| T | T | T | F | T | T | T | T | T |

==========questao4

4. Mostre que $\neg\phi \to \neg\psi$ é consequência lógica de $\psi \to \phi$, e vice-versa.

   **Solução**
   Seja $I$ uma interpretação qualquer. Temos as seguintes equivalências: $I(\psi \to \phi) = V \Leftrightarrow I(\psi) = F$ ou $I(\phi) = V \Leftrightarrow I(\neg\psi) = V$ ou $I(\neg\phi) = F \Leftrightarrow I((\neg\phi) \to (\neg\psi))$.

5. Construa provas para todas as variantes das regras (MT) e (CP) e indique quais derivações são da lógica clássica e quais da lógica intuicionista proposicional:

$$\frac{\pm\phi \to \pm\psi \qquad \mp\psi}{\mp\phi}\ (\mathrm{MT}_{1 \text{ e } 2}) \qquad\qquad \frac{\pm/\pm\phi \to \pm/\mp\psi}{\mp/\pm\psi \to \mp/\mp\phi}\ (\mathrm{CP}_{1,2,3 \text{ e } 4})$$

   **Solução**

Intuicionista

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi \to \psi \qquad [\phi]^x}{\psi}\,(\to_e) \qquad \neg\psi}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\phi}\,(\neg_i)\ x$$

Clássica

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\phi \to \neg\psi \qquad [\neg\phi]^x}{\neg\psi}\,(\to_e) \qquad \psi}{\bot}\,(\neg_e)}{\phi}\,(\mathrm{PBC})\ x$$

Intuicionista

$$\dfrac{\dfrac{\phi \to \psi \quad [\neg\psi]^u}{\neg\phi}\,(\mathrm{MT})}{\neg\psi \to \neg\phi}\,(\to_i)\ u$$

Clássica

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\phi \to \neg\psi \quad \dfrac{[\psi]^u}{\neg\neg\psi}\,(\neg\neg_i)}{\neg\neg\phi}\,(\mathrm{MT})}{\phi}\,(\neg\neg_e)}{\psi \to \phi}\,(\to_i)\ u$$

Intuicionista

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi \to \neg\psi \qquad [\phi]^x}{\neg\psi}\,(\to_e) \qquad [\psi]^y}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\phi}\,(\neg_i)\ x}{\psi \to \neg\phi}\,(\to_i)\ y$$

Clássica

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\phi \to \psi \qquad [\neg\phi]^x}{\psi}\,(\to_e) \qquad [\neg\psi]^y}{\bot}\,(\neg_e)}{\phi}\,(\mathrm{PBC})\ x}{\neg\psi \to \phi}\,(\to_i)\ y$$

6. Construa deduções para provar os sequentes a seguir e e indique se foi utilizada a lógica minimal, intuicionista ou clássica:

   (a) $\phi \vee \psi \dashv\vdash \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$.

   Minimal

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\phi \vee \psi$}
\AxiomC{$[\neg\phi \wedge \neg\psi]^u$}
\RightLabel{$(\wedge_e)$}
\UnaryInfC{$\neg\phi$}
\AxiomC{$[\phi]^x$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\AxiomC{$[\neg\phi \wedge \neg\psi]^u$}
\RightLabel{$(\wedge_e)$}
\UnaryInfC{$\neg\psi$}
\AxiomC{$[\psi]^y$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\vee_e)\ x, y$}
\TrinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ u$}
\UnaryInfC{$\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$}
\end{prooftree}
$$

   Clássica

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$}
\AxiomC{$[\neg(\phi \vee \psi)]^w$}
\AxiomC{$[\phi]^u$}
\LeftLabel{$(\vee_i)$}
\UnaryInfC{$\phi \vee \psi$}
\LeftLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\LeftLabel{$(\neg_i)\ u$}
\UnaryInfC{$\neg\phi$}
\AxiomC{$[\neg(\phi \vee \psi)]^w$}
\AxiomC{$[\psi]^v$}
\RightLabel{$(\vee_i)$}
\UnaryInfC{$\phi \vee \psi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ v$}
\UnaryInfC{$\neg\psi$}
\RightLabel{$(\wedge_i)$}
\BinaryInfC{$\neg\phi \wedge \neg\psi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{(PBC) $w$}
\UnaryInfC{$\phi \vee \psi$}
\end{prooftree}
$$

   (b) $\phi \wedge \psi \dashv\vdash \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$.

Minimal

$$\dfrac{\dfrac{[\neg\phi\vee\neg\psi]^u \qquad \dfrac{\dfrac{\phi\wedge\psi}{\phi}\,(\wedge_e) \qquad [\neg\phi]^x}{\bot}\,(\neg_e) \qquad \dfrac{\dfrac{\phi\wedge\psi}{\psi}\,(\wedge_e) \qquad [\neg\psi]^y}{\bot}\,(\neg_e)}{\bot}\,(\vee_e)\ x,y}{\neg(\neg\phi\vee\neg\psi)}\,(\neg_i)\ u$$

Clássica

$$\dfrac{\dfrac{\neg(\neg\phi\vee\neg\psi) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\psi\vee\neg\psi}\,((\text{LEM})) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi]^z \qquad [\psi]^x}{\phi\wedge\psi}\,(\wedge_i) \qquad \neg(\phi\wedge\psi)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\phi}\,(\neg_i)\ z}{\neg\phi\vee\neg\psi}\,(\vee_i) \qquad \dfrac{[\neg\psi]^y}{\neg\phi\vee\neg\psi}\,(\vee_i)}{\neg\phi\vee\neg\psi}\,(\vee_e)\ x,}{\bot}\,(\neg_e)}{\phi\wedge\psi}\,(\text{PBC}$$

(c) $\varphi\rightarrow\psi \dashv\vdash (\neg\varphi)\vee\psi$

Clássica

$$\dfrac{\dfrac{}{\varphi\vee\neg\varphi}\,(\text{LEM}) \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi]^x \qquad \varphi\rightarrow\psi}{\psi}\,(\rightarrow_e)}{\neg\varphi\vee\psi}\,(\vee_i) \qquad \dfrac{[\neg\varphi]^y}{\neg\varphi\vee\psi}\,(\vee_i)}{\neg\varphi\vee\psi}\,(\vee_e)\ x,y$$

Intuicionista

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(\neg\varphi)\vee\psi$}
\AxiomC{$[\varphi]^w$}
\AxiomC{$[\neg\varphi]^x$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\bot_e)$}
\UnaryInfC{$\psi$}
\AxiomC{$[\psi]^y$}
\RightLabel{$(\vee_e)\ x,y$}
\TrinaryInfC{$\psi$}
\RightLabel{$(\to_i)\ w$}
\UnaryInfC{$\varphi\to\psi$}
\end{prooftree}
$$

(d) $\varphi\wedge\psi \dashv\vdash \neg(\varphi\to\neg\psi)$

Intuicionista

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\varphi\wedge\psi$}
\RightLabel{$(\wedge_e)$}
\UnaryInfC{$\psi$}
\AxiomC{$\varphi\wedge\psi$}
\RightLabel{$(\wedge_e)$}
\UnaryInfC{$\varphi$}
\AxiomC{$[\varphi\to\neg\psi]^x$}
\RightLabel{$(\to_e)$}
\BinaryInfC{$\neg\psi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ x$}
\UnaryInfC{$\neg(\varphi\to\neg\psi)$}
\end{prooftree}
$$

Clássica

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg(\varphi\to\neg\psi)$}
\AxiomC{$[\varphi]^x$}
\AxiomC{$[\neg\varphi]^y$}
\RightLabel{$(\bot_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\bot_e)$}
\UnaryInfC{$\neg\psi$}
\RightLabel{$(\to_i)\ x$}
\UnaryInfC{$\varphi\to\neg\psi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{(PBC) $y$}
\UnaryInfC{$\varphi$}
\AxiomC{$\neg(\varphi\to\neg\psi)$}
\AxiomC{$[\neg\psi]^z$}
\RightLabel{$(\to_i)\ \emptyset$}
\UnaryInfC{$\varphi\to\neg\psi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{(PBC) $z$}
\UnaryInfC{$\psi$}
\RightLabel{$(\wedge_i)$}
\BinaryInfC{$\varphi\wedge\psi$}
\end{prooftree}
$$

(e) $\varphi\vee\psi \dashv\vdash (\neg\varphi)\to\psi$

Clássica

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(LEM)}
\UnaryInfC{$\varphi\vee\neg\varphi$}
\AxiomC{$[\neg\varphi]^x$}
\AxiomC{$(\neg\varphi)\to\psi$}
\RightLabel{$(\to_e)$}
\BinaryInfC{$\psi$}
\RightLabel{$(\vee_i)$}
\UnaryInfC{$\varphi\vee\psi$}
\AxiomC{$[\varphi]^y$}
\RightLabel{$(\vee_i)$}
\UnaryInfC{$\varphi\vee\psi$}
\RightLabel{$(\vee_e)\ x,y$}
\TrinaryInfC{$\varphi\vee\psi$}
\end{prooftree}
$$

Intuicionista

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^w \qquad [\varphi]^x}{\bot}\,(\neg_e)}{\psi}\,(\bot_e) \qquad [\psi]^y}{\psi}\,(\vee_e)\ x,y}{(\neg\varphi)\to\psi}\,(\to_i)\ w$$

7. Apresente provas minimais ou intuicionistas para os sequentes:

   (a) $\vdash \neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$;

   (b) $\vdash \neg\neg(\neg\neg\phi \to \phi)$;

   (c) $\vdash \neg\neg(((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi)$.

   (a) Para $\vdash \neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$, temos a seguinte derivação no cálculo de sequentes minimal:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi\Rightarrow\varphi\quad(\mathrm{Ax})}{\varphi\Rightarrow\varphi\vee\neg\varphi}\,(\mathrm{R}_\vee) \qquad \bot,\varphi\Rightarrow\bot\quad(\mathrm{L}_\bot)}{\neg(\varphi\vee\neg\varphi),\varphi\Rightarrow\bot}\,(\mathrm{L}_\to)}{\neg(\varphi\vee\neg\varphi)\Rightarrow\neg\varphi}\,(\mathrm{R}_\to)}{\neg(\varphi\vee\neg\varphi)\Rightarrow\varphi\vee\neg\varphi}\,(\mathrm{R}_\vee)\qquad \bot,\neg(\varphi\vee\neg\varphi)\Rightarrow\bot\quad(\mathrm{L}_\bot)}{\neg(\varphi\vee\neg\varphi),\neg(\varphi\vee\neg\varphi)\Rightarrow\bot}\,(\mathrm{L}_\to)}{\neg(\varphi\vee\neg\varphi)\Rightarrow\bot}\,(\mathrm{LC})}{\Rightarrow\neg\neg(\varphi\vee\neg\varphi)}\,(\mathrm{R}_\to)$$

   (b) Para $\vdash \neg\neg(\neg\neg\phi \to \phi)$, temos a seguinte derivação no cálculo de sequentes intuicionista, mas note que pode ser derivado utilizando o cálculo minimal:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi, \neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi \;(\mathrm{Ax})}{\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi \to \varphi}\;(\mathrm{R}_{\to}) \qquad \bot \Rightarrow \bot \;\;(\mathrm{Ax})}{\neg(\neg\neg\varphi \to \varphi), \varphi \Rightarrow \bot}\;(\mathrm{L}_{\to})}{\neg(\neg\neg\varphi \to \varphi) \Rightarrow \neg\varphi}\;(\mathrm{R}_{\to}) \qquad \bot \Rightarrow \quad (\mathrm{L}_{\bot})}{\neg(\neg\neg\varphi \to \varphi), \neg\neg\varphi \Rightarrow}\;(\mathrm{L}_{\to})}{\neg(\neg\neg\varphi \to \varphi), \neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi}\;(\mathrm{RW})}{\neg(\neg\neg\varphi \to \varphi) \Rightarrow \neg\neg\varphi \to \varphi}\;(\mathrm{R}_{\to}) \qquad \bot \Rightarrow \bot \;\;(\mathrm{Ax})}{\neg(\neg\neg\varphi \to \varphi), \neg(\neg\neg\varphi \to \varphi) \Rightarrow \bot}}{\neg(\neg\neg\varphi \to \varphi) \Rightarrow \bot}}{\Rightarrow \neg\neg(\neg\neg\varphi \to \varphi)}
$$

(c) $\vdash \neg\neg(((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi)$:

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{[\neg\phi]^u \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\neg\neg((\phi \to \psi) \to \phi)]^x \\ \vdots\;(\text{Ex. ??}) \\ \neg\neg(\phi \to \psi) \to \neg\neg\phi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\phi]^u}{\neg\psi \to \neg\phi}\;(\to_i)\,\emptyset \qquad [\neg\psi]^v}{\neg\phi}\;(\to_e) \qquad [\neg\neg\phi]^w}{\bot}\;(\neg_e)}{\neg\neg\psi}\;(\neg_i)\; v}{\neg\neg\phi \to \neg\neg\psi}\;(\to_i)\; w \\ \vdots\;(\text{Ex. ??}) \\ \neg\neg(\phi \to \psi) \end{array}}{\neg\neg\phi}\;(\to_e)}{\bot}\;(\neg_e)}{\dfrac{\neg\neg\phi}{\neg\neg((\phi \to \psi) \to \phi) \to \neg\neg\phi}\;(\to_i)\; x}\;(\neg_i)\; u \\
\vdots\;(\text{Ex. ??}) \\
\neg\neg(((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi)
\end{array}
$$

8. Prove o teorema de Glivenko: Sejam $\Gamma$ um conjunto finito de fórmulas, e $\varphi$ uma fórmula qualquer da lógica proposicional. Prove que se $\varphi$ tem uma prova clássica a partir de $\Gamma$ então $\neg\neg\varphi$ tem uma prova intuicionista a partir de $\Gamma$, ou seja, se $\Gamma \vdash_c \varphi$ então $\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi$

   **Solução**

   Indução na derivação $\Gamma \vdash_c \varphi$. Considerando que a negação pode ser vista como uma abreviação da implicação ao absurdo, i.e. $\neg\varphi \equiv \varphi \to \bot$, os casos $(\neg_i)$ e $(\neg_e)$ não precisam ser considerados separadamente (complete!). Considere a última regra aplicada na prova $\Gamma \vdash_c \varphi$:

   - $(\wedge_i)$: Neste caso, temos que $\varphi$ é da forma $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ e a prova $\Gamma \vdash_c \varphi$ tem a seguinte estrutura:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \nabla \\ \varphi_1\end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix}\Gamma \\ \nabla \\ \varphi_2\end{matrix}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\ (\wedge_i)$$

     Por hipótese de indução, temos que $\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi_i$ $(i = 1, 2)$, e concluímos como segue:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \nabla_{\text{(h.i.)}} \\ \neg\neg\varphi_2\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \nabla_{\text{(h.i.)}} \\ \neg\neg\varphi_1\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)]^x \qquad \dfrac{[\varphi_1]^y \qquad [\varphi_2]^z}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\ (\wedge_i)}{\bot}\ (\neg_e)}{\neg\varphi_1}\ (\neg_i)\ y}{\bot}\ (\neg_e)}{\neg\varphi_2}\ (\neg_i)\ z}{\dfrac{\bot}{\neg\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)}\ (\neg_i)\ x}\ (\neg_e)$$

- $(\wedge_e)$: Neste a prova $\Gamma \vdash_c \varphi$ tem a seguinte estrutura:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla\\ \varphi \wedge \psi\end{array}}{\varphi}\ (\wedge_e)$$

  Por hipótese de indução temos que $\Gamma \vdash_i \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$, e concluímos como segue:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg(\varphi \wedge \psi)\end{array}}{(\neg\neg\varphi) \wedge (\neg\neg\psi)}\ \text{Exercício } (7.c)}{\neg\neg\varphi}\ (\wedge_e)$$

- $(\vee_i)$: Neste caso, temos que $\varphi$ é da forma $\varphi_1 \vee \varphi_2$ e a prova $\Gamma \vdash_c \varphi$ tem a seguinte estrutura:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla\\ \varphi_1\end{array}}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\ (\vee_i)$$

  Por hipótese de indução, temos que $\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi_i$ $(i = 1, 2)$, e concluímos como segue:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma$}
\noLine
\UnaryInfC{$\nabla_{\text{(h.i.)}}$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg\neg\varphi_1$}
\AxiomC{$[\neg(\varphi_1 \lor \varphi_2)]^x$}
\AxiomC{$[\varphi_1]^y$}
\RightLabel{$(\lor_i)$}
\UnaryInfC{$\varphi_1 \lor \varphi_2$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ y$}
\UnaryInfC{$\neg\varphi_1$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ x$}
\UnaryInfC{$\neg\neg(\varphi_1 \lor \varphi_2)$}
\end{prooftree}
$$

- $(\lor_e)$: Neste caso, temos que $\varphi$ é da forma $\varphi_1 \lor \varphi_2$ e a prova $\Gamma \vdash_c \varphi$ tem a seguinte estrutura:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma$}
\noLine
\UnaryInfC{$\nabla$}
\noLine
\UnaryInfC{$(\varphi_1 \lor \varphi_2)$}
\AxiomC{$[\varphi_1]^x, \Gamma$}
\noLine
\UnaryInfC{$\nabla$}
\noLine
\UnaryInfC{$\varphi_3$}
\AxiomC{$[\varphi_2]^y, \Gamma$}
\noLine
\UnaryInfC{$\nabla$}
\noLine
\UnaryInfC{$\varphi_3$}
\RightLabel{$(\lor_e)\ x, y$}
\TrinaryInfC{$\varphi_3$}
\end{prooftree}
$$

  Por hipótese de indução, temos que $\Gamma \vdash_i \neg\neg(\varphi_1 \lor \varphi_2)$ e $\Gamma, [\varphi_i] \vdash_i \neg\neg\varphi_3$ $(i = 1, 2)$ e concluímos como segue:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma$}
\noLine
\UnaryInfC{$\nabla_{\text{(h.i.)}}$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg\neg(\varphi_1 \lor \varphi_2)$}
\AxiomC{$[\neg\varphi_3]^w$}
\AxiomC{$\Gamma\ [\varphi_1]^y$}
\noLine
\UnaryInfC{$\nabla_{\text{(h.i.)}}$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg\neg\varphi_3$}
\AxiomC{$\Gamma\ [\varphi_2]^z$}
\noLine
\UnaryInfC{$\nabla_{\text{(h.i.)}}$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg\neg\varphi_3$}
\AxiomC{$[\varphi_1 \lor \varphi_2]^x$}
\RightLabel{$(\lor_e)\ y, z$}
\TrinaryInfC{$\neg\neg\varphi_3$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ x$}
\UnaryInfC{$\neg(\varphi_1 \lor \varphi_2)$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ w$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\varphi_3$}
\end{prooftree}
$$

- $(\to_i)$ : Neste caso, temos que $\varphi$ é da forma $\varphi_1 \to \varphi_2$ e a prova $\Gamma \vdash_c \varphi$ tem a seguinte estrutura:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \quad [\varphi_1]^x\\ \vdots\\ \varphi_2\end{array}}{\varphi_1 \to \varphi_2}\;(\to_i)$$

Por hipótese de indução, temos que $\Gamma, \varphi_1 \vdash_i \neg\neg\varphi_2$, e concluímos como segue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg\varphi_1]^w \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\varphi_2]^z \qquad \begin{array}{c}\Gamma\ [\varphi_1]^x\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg\varphi_2\end{array}}{\bot}\;(\neg_e)}{\neg\varphi_1}\;(\neg_i)\ x}{\bot}\;(\neg_e)}{\dfrac{\neg\neg\varphi_2}{(\neg\neg\varphi_1) \to (\neg\neg\varphi_2)}\;(\to_i)\ w}\;(\neg_i)\ z}{\neg\neg(\varphi_1 \to \varphi_2)}\;\text{Exercício } (7.b)$$

- $(\to_e)$: Neste caso, temos que $\varphi$ é da forma $\varphi_1 \to \varphi_2$ e a prova $\Gamma \vdash_c \varphi$ tem a seguinte estrutura:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ \varphi_1 \to \varphi_2\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ \varphi_1\end{array}}{\varphi_2}\;(\to_e)$$

Por hipótese de indução, temos que $\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi_1$ e $\Gamma \vdash_i \neg\neg(\varphi_1 \to \varphi_2)$ e concluímos como segue:

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg(\varphi_1 \to \varphi_2)\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg\varphi_1\end{array} \qquad \dfrac{[\varphi_1 \to \varphi_2]^x \qquad [\neg\varphi_2]^y}{\neg\varphi_1}\,\text{(MT)}}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg(\varphi_1 \to \varphi_2)}\,(\neg_i), x}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg\varphi_2}\,(\neg_i), y
$$

- (PBC): Neste caso, temos que:

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \quad [\neg\varphi]^x\\ \nabla\\ \bot\end{array}}{\varphi}\,\text{(PBC) } x
$$

Por hipótese de indução, temos que $\Gamma, \neg\varphi \vdash_i \neg\neg\bot$, e concluímos como segue:

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \; [\neg\varphi]^y\\ \nabla_{\text{(i.h.)}}\\ \neg\neg\bot\end{array} \qquad \dfrac{[\bot]^x}{\neg\bot}\,(\neg_i)\ x}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg\varphi}\,(\neg_i)\ y
$$