Universidade de Brasília - Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação
Lógica Computacional 1 - (2021/1)

2 de agosto de 2021

Lista: Lógica Proposicional

1. Nos seguintes exercícios use a prova por indução na estrutura das fórmulas.
   (a) Demonstre que uma fórmula bem formada é balanceada, no sentido de que o número de parênteses abertos "("é igual ao de parênteses fechados ")", isto é, $|\varphi|_{(} = |\varphi|_{)}$, para uma fórmula φ qualquer.
   (b) Demonstre que para todo prefixo s de uma fórmula bem formada φ, vale $|s|_{(} \geq |s|_{)}$.
   (c) Demonstre que a palavra vazia não é uma fórmula.
   (d) Demonstre que uma fórmula bem formada não tem prefixos próprios que são também fórmulas: Se φ é uma fórmula bem formada e s é prefixo próprio de φ então s não pode ser uma fórmula bem formada.
2. "Toda fórmula satisfatível é tautológica." Esta afirmação está correta? Justifique.
3. Construa a tabela de verdade e verifique se as fórmulas a seguir são tautologias, contradições ou contingências. Adicionalmente classifique-as como satisfatíveis ou insatisfatíveis:
   (a) $\psi \to (\phi \to (\phi \to (\psi \to \phi)))$
   (b) $(\phi \to \psi) \to ((\delta \to \gamma) \to (\phi \wedge \delta \to \psi \wedge \gamma))$
   (c) $\phi \to \neg\phi$
   (d) $(\phi \wedge \psi) \to (\psi \vee \phi)$
   (e) $((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \to \delta)) \wedge (\neg\phi \vee \delta)$
4. Mostre que $\neg\phi \to \neg\psi$ é consequência lógica de $\psi \to \phi$, e vice-versa.
5. Construa provas para todas as variantes das regras (MT) e (CP) e indique quais derivações são da lógica clássica e quais da lógica intuicionista proposicional:

$$\frac{\pm\phi \to \pm\psi \qquad \mp\psi}{\mp\phi} \ (\mathrm{MT}_{1 \text{ e } 2})$$

$$\frac{\pm/\pm\phi \to \pm/\mp\psi}{\mp/\pm\psi \to \mp/\mp\phi}\ (\mathrm{CP}_{1,2,3 \text{ e } 4})$$

6. Construa deduções para provar os sequentes a seguir e e indique se foi utilizada a lógica minimal, intuicionista ou clássica:
   (a) $\phi \vee \psi \dashv\vdash \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$.
   (b) $\phi \wedge \psi \dashv\vdash \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$.
   (c) $\varphi \to \psi \dashv\vdash (\neg\varphi) \vee \psi$
   (d) $\varphi \wedge \psi \dashv\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi)$
   (e) $\varphi \vee \psi \dashv\vdash (\neg\varphi) \to \psi$
7. Apresente provas minimais ou intuicionistas para os sequentes:
   (a) $\vdash \neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$;
   (b) $\vdash \neg\neg(\neg\neg\phi \to \phi)$;
   (c) $\vdash \neg\neg(((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi)$.
8. Prove o teorema de Glivenko: Sejam Γ um conjunto finito de fórmulas, e φ uma fórmula qualquer da lógica proposicional. Prove que se φ tem uma prova clássica a partir de Γ então $\neg\neg\varphi$ tem uma prova intuicionista a partir de Γ, ou seja, se $\Gamma \vdash_c \varphi$ então $\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi$