Lógica Computacional 1 **(2021/1)**

6 de setembro de 2021

Lista: Lógica de Predicados

1. Com derivações em Dedução Natural, prove as sequintes equivalências.
   (a) $\neg \forall x\, \phi \dashv\vdash \exists x\, \neg \phi$
   (b) $\forall x\, \phi \dashv\vdash \neg \exists x\, \neg \phi$
   (c) $\exists x\, \phi \dashv\vdash \neg \forall x\, \neg \phi$
2. Apresente derivações em Dedução Natural, para os sequentes a seguir assumindo que x não ocorre livre em ψ:
   (a) $(\forall x\, \phi) \wedge \psi \vdash \forall x\, (\phi \wedge \psi)$
   (b) $(\exists x\, \phi) \wedge \psi \vdash \exists x\, (\phi \wedge \psi)$
   (c) $\forall x\, (\psi \to \phi) \vdash \psi \to \forall x\, \phi$
   (d) $\forall x\, (\phi \to \psi) \vdash (\exists x\, \phi) \to \psi$
3. Prove que não existe uma derivação intuicionista para
   (a) $\neg \exists_x \neg \varphi \vdash \forall_x \varphi$
   (b) $\neg \forall_x \neg \varphi \vdash \exists_x \varphi$

   Dica: Mesmo que existam derivações clássicas destes sequentes, isto não implica que eles sejam estritamente clássicos. Para concluir que um sequente não possui uma derivação intuicionista, mostre que a partir dele (e das regras intuicionistas) é possível provar algum teorema estritamente clássico.
4. Considere a seguinte transformação:
   - $T(p) = p$
   - $T(\neg \phi) = \neg T(\phi)$

- $T(\phi \wedge \psi) = T(\phi) \wedge T(\psi)$
- $T(\phi \vee \psi) = \neg(\neg T(\phi) \wedge \neg T(\psi))$
- $T(\phi \to \psi) = \neg(T(\phi) \wedge \neg T(\psi))$
- $T(\forall x \phi) = \forall x T(\phi)$
- $T(\exists x \phi) = \neg \forall x \neg T(\phi)$

Mostre que para qualquer fórmula ϕ, $T(\phi)$ é equivalente a ϕ.

5. Seja φ uma fórmula da lógica de predicados. Definimos a tradução negativa de Gödel-Gentzen de φ, denotada por φ^N, indutivamente por:

$$\varphi^N = \begin{cases} \neg\neg\varphi & \text{se } \varphi \text{ é uma fórmula atômica} \\ \neg(\psi^N) & \text{se } \varphi = \neg\psi \\ \varphi_1^N \wedge \varphi_2^N & \text{se } \varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \\ \neg(\neg(\varphi_1^N) \wedge \neg(\varphi_2^N)) & \text{se } \varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2 \\ \varphi_1^N \to \varphi_2^N & \text{se } \varphi = \varphi_1 \to \varphi_2 \\ \forall_x(\psi^N) & \text{se } \varphi = \forall_x \psi \\ \neg(\forall_x \neg(\psi^N)) & \text{se } \varphi = \exists_x \psi \end{cases}$$

Construa uma prova intuicionista para o sequente a seguir: $\neg\neg(\varphi^N) \vdash_i \varphi^N$

6. Uma fórmula da lógica de predicados ϕ pertence ao *fragmento negativo* se ϕ pode ser construída a partir da seguinte gramática, onde $t_1, t_2, \ldots, t_n$ $(n > 0)$ são termos:

$$\phi ::= \neg p(t_1, t_2, \ldots, t_n) \;\; || \;\; \bot \;\; || \;\; (\neg\phi) \;\; || \;\; (\phi \wedge \phi) \;\; || \;\; (\phi \to \phi) \;\; || \;\; (\forall_x \phi)$$

Prove na lógica minimal que $\neg\neg\theta \vdash_m \theta$ para qualquer fórmula θ pertencente ao fragmento negativo. Use indução na estrutura de θ.