Informalmente, uma função suave é uma função que cresce lentamente:

- $f(n) = \lg n$ é suave:

$$f(2n) = \lg 2.n = 1 + \lg n = \Theta(\lg n) = \Theta(f(n))$$

Já a função exponencial não é suave:

$$f(n) = 2^n$$

$$f(2.n) = 2^{2n} = 4^n = \Theta(4^n) \neq \Theta(2^n).$$

Lema 1.3. *Seja $f(n)$ uma função suave. Se $f(2.n) \leq c_2.f(n), \forall n \geq n_0$ então $f(2^k.n) \leq c_2^k.f(n), \forall k \geq 1, n \geq n_0$.*

Prova: Indução em K:

- $K = 1$: trivial.
- $K > 1$: Assuma que (h.i.) $\boxed{\text{se } f(2n) \leq c_2.f(n), \forall n \geq n_0 \text{ então } f(2^K.n) \leq c_2^K.f(n), \forall K \geq 1, n \geq n_0.}$

E queremos provar que se (*) $\boxed{f(2n) \leq c_2.f(n)}, \forall n \geq n_0$ então $f(2^{K+1}.n) \leq c_2^{K+1}.f(n), \forall K \geq 1, n \geq n_0.$

$$f(2^{K+1}.n) = f(2.2^K.n) \overset{(*)}{\leq} c_2.f(2^K.n) \overset{(h.i.)}{\leq} c_2.c_2^K.f(n) = c_2^{K+1}.f(n). \quad \blacksquare$$

Teorema 1.5. *Seja $f(n)$ uma função suave. Então para qualquer $b \geq 2$ fixado,*

$$f(b.n) = \Theta(f(n))$$

Prova: Dividiremos a prova em 2 passos:

① $f(b.n) = O(f(n))$.

② $f(b.n) = \Omega(f(n))$.

Faremos apenas o passo ①: Queremos mostrar que existem constantes positivas c e n_0 tais que

$$\boxed{f(b.n) \leq c \cdot f(n), \ \forall n \geq n_0}$$

Sabemos que existe $k > 0$ tal que $2^{k-1} \leq \underline{b < 2^k}$. Como f é suave $f(b.n) \leq f(2^k.n) \overset{(1.3)}{\leq} c_2^k \cdot f(n), \ \forall n \geq n'$.

Tome $c = c_2^k$ e $n_0 = n'$.

Teorema 1.6 (Regra da suavização). *Seja $T(n))$ uma função eventualmente não-decrescente, e $f(n)$ uma função suave. Se $T(n) = \Theta(f(n))$ para valores de n que são potências de b ($b \geq 2$), então*

$$T(n) = \Theta(f(n)), \forall n.$$

Prova: Como no teorema anterior, analisaremos apenas a cota superior: Suponha que $T(n) = O(f(n))$, para $n = b^k \ (k \geq 1)$.

(*) $\boxed{T(b^k) = O(f(b^k))}$

Existe $r > 0 : b^r \leq n < b^{r+1}$ Como T é eventualmente não-decrescente então $T(n) \leq T(b^{r+1})$. De (*) temos que existem constantes positivas c e n_0 tais que

$$T(b^{r+1}) \leq c \cdot f(b^{r+1}), \ \forall n \geq n_0.$$

$$= c \cdot f(b \cdot b^r) \leq c \cdot c' \cdot f(b^r) \leq c \cdot c' \cdot f(n), \ \forall n \geq n_0.$$

Logo, $T(n) \leq c.c'.f(n), \ \forall n \geq n_0$. Ou seja,

$$T(n) = O(f(n)).$$

Teorema 1.7 (Teorema Mestre - versão 1). *Seja $T(n)$ uma função eventualmente não-decrescente que satisfaz a recorrência*

$$T(n) = a.T(n/b) + f(n), \quad \textit{para } n = b^k \ (k \geq 1)$$
$$T(1) = c$$

onde $a \geq 1, b \geq 2$ e $c > 0$. Se $f(n) = \Theta(n^d)$, onde $d \geq 0$, então

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^d), & \textit{se } a < b^d \\ \Theta(n^d . \lg n), & \textit{se } a = b^d \\ \Theta(n^{\log_b a}), & \textit{se } a > b^d \end{cases}$$

(a) $T(1) = 1$, $T(n) = 3T(n/2) + n^2$, $n \geq 2$

$a = 3$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 2$. $\quad a = 3 < 4 = 2^2 = b^d$

$T(n) = \Theta(n^2)$

(c) $T(1) = 1$, $T(n) = 2T(n/2) + n$, $n \geq 2$

$a = 2$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 1$ $\quad a = 2 = 2^1 = b^d$

$T(n) = \Theta(n . \lg n)$

Prova do TM: $n = b^k \ (k \geq 1)$, $f(n) = n^d$.

$$T(b^k) = a.\underline{T(b^{k-1})} + (b^k)^d$$
$$= a.(a.T(b^{k-2}) + (b^{k-1})^d) + (b^k)^d$$
$$= a^2.\underline{T(b^{k-2})} + a.(b^d)^{k-1} + (b^d)^k$$
$$= a^2.(a.T(b^{k-3}) + (b^d)^{k-2}) + a.(b^d)^{k-1} + (b^d)^k$$
$$= a^3.T(b^{k-3}) + a^2.(b^d)^{k-2} + a.(b^d)^{k-1} + (b^d)^k$$
$$= \ldots$$
$$= a^k.T(b^{k-k}) + a^{k-1}.(b^d) + \ldots + a(b^d)^{k-1} + (b^d)^k$$
$$= a^k.\left[T(1) + b^d/a + \ldots + (b^d)^{k-1}/a^{k-1} + (b^d)^k/a^k\right]$$
$$= a^k\left[T(1) + \sum_{j=1}^{k} (b^d/a)^j\right].$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{k} a^k = \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} \quad a \neq 1}$$

$$T(n) = n^{\log_b a}.[T(1) + \sum_{j=1}^{\log_b n} (b^j)^d/a^j] = n^{\log_b a}.[T(1) + \sum_{j=1}^{\log_b n} (b^d/a)^j]$$

Temos 3 casos:

① $\boxed{b^d = a}$: $T(n) = n^{\log_b^a}.\left[T(1) + \sum_{j=1}^{\log_b^n} 1^j\right] =$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}, \quad \text{se } |a| < 1}$$

$$= n^{\log_b a}\left[T(1) + \log_b n\right]$$

$$= n^d\left[T(1) + \frac{\lg n}{\lg b}\right]$$

$$= n^d \cdot T(1) + \frac{1}{\lg b} \cdot n^d \cdot \lg n \quad = \Theta(n^d \cdot \lg n)$$

2. $b^d < a$:

3. $b^d > a$: