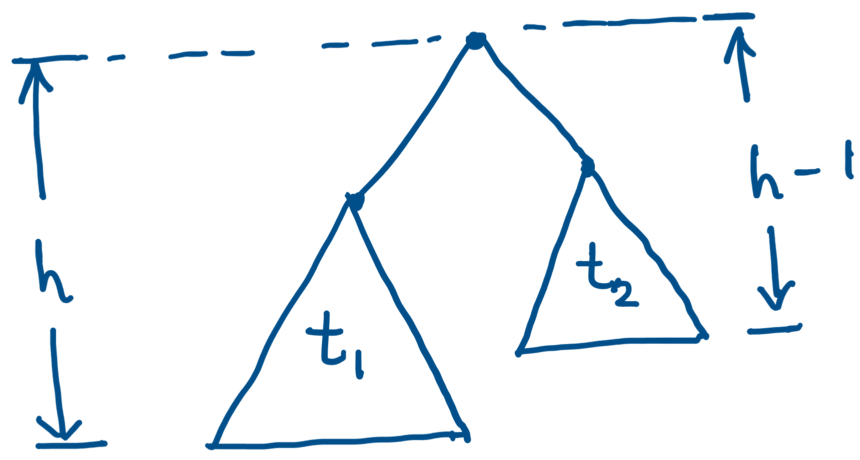
Aula 14 – heapsort - gabarito

terça-feira, 8 de março de 2022 20:11

Exercício 1.3. *Mostre que, em um heap com n elementos e raiz $A[i]$, cada uma das subárvores com raiz em $2i$ e $2i+1$ têm, no máximo, $2n/3$ elementos.*

Suponha que um heap com n elementos tenha altura h. Uma subárvore do heap terá o número máximo de elementos quando for uma árvore binária completa, e esta subárvore terá o número máximo de elementos em relação ao número de elementos do heap quando for a subárvore da esquerda. Esquematicamente, temos:



Neste caso, t_1 possui o número máximo de elementos em relação ao número total de elementos do heap. Observe que t_1 é uma árvore binária completa de altura $h-1$ e t_2 é uma árvore binária completa de altura $h-2$. Logo, o número n_1 de elementos de t_1 é igual a 2^h-1, enquanto que o número n_2 de elementos de t_2 é igual a $2^{h-1}-1$. Como $n = n_1+n_2+1$, podemos escrever $n = (2^h-1)+(2^{h-1}-1)+1$. Nosso objetivo é escrever $n_1 = 2^h-1$ em função de n:

$$n = (2^h-1)+(2^{h-1}-1)+1 \iff$$

$$n = 2.2^{h-1} + 2^{h-1} - 1 \iff$$

$$n+1 = 3.2^{h-1} \iff$$

$$2^{h-1} = \frac{n+1}{3} \iff$$

$$2^h = \frac{2(n+1)}{3} \iff$$

$$2^h = \frac{2n}{3} + \frac{1}{3} \iff$$

$$\underbrace{2^h-1}_{n_1} = \frac{2n}{3} - \frac{2}{3} \leq \frac{2n}{3}.$$

$\boxtimes$