Aula 15 – quicksort - gabarito

quinta-feira, 10 de março de 2022 21:23

Resolva o exercício abaixo:

Algorithm 2: Partition(A, p, r)

1 $x = A[r]$;
2 $i = p - 1$;
3 **for** $j = p$ *to* $r - 1$ **do**
4   **if** $A[j] \leq x$ **then**
5         $i = i + 1$;
6   exchange $A[i]$ com $A[j]$;
7   **end**
8 **end**
9 exchange $A[i + 1]$ with $A[r]$;
10 return $i + 1$;

Exercício 1.1. *Prove a seguinte invariante de laço, e conclua que o algoritmo* Partition *é correto:*

> *Antes de cada iteração do laço **for** (linhas 3-8), para todo k, temos:*
>
> 1. *Se $p \leq k \leq i$, então $A[k] \leq x$;*
> 2. *Se $i + 1 \leq k \leq j - 1$, então $A[k] > x$;*
> 3. *Se $k = r$, então $A[k] = x$.*

Antes da primeira iteração temos que $x = A[r]$, $i = p-1$ e $j = p$. Neste caso, a condição 1 é verdadeira por vacuidade já que não existe nenhum $p \leq k \leq i = p-1$. Da mesma forma, a condição 2 vale porque não existe k tal que $p = i+1 \leq k \leq j-1 = p-1$. Por fim, a condição 3 vale pois $A[k] = A[r] = x$.

Manutenção: Suponha $p < j \leq r-1$. Mais precisamente, digamos que $j = p+a$ $(a>0)$. Temos 2 casos a considerar: 1 $A[j] = A[p+a] \leq x$. Neste caso, i é incrementado para $i+1$, e $A[j] = A[p+a]$ é permutado com $A[i+1] > x$ de forma que a invariante é satisfeita.
2 $A[j] = A[p+a] > x$. Neste caso, apenas o valor de j é incrementado e a invariante continua sendo satisfeita.

Finalização: Ao final da execução do algoritmo, $j = r$, e as entradas do vetor A estão em algum dos subconjuntos descritos pela invariante. Portanto, o algoritmo particiona corretamente o vetor A.