Aula06 - Permutação-gabarito

quinta-feira, 3 de fevereiro de 2022 21:06

Considere a seguinte definição indutiva de permutação (disponível nas notas de aula):

Definição 71. *Sejam x e y números naturais, e l, l' e l'' listas de números naturais. O predicado binário* **permutation** *é definido pelas regras de inferência seguintes:*

$$\frac{}{permutation\ nil\ nil}\ (permutation\_nil)$$

$$\frac{permutation\ l\ l'}{permutation\ (x :: l)\ (x :: l')}\ (permutation\_skip)$$

$$\frac{}{permutation\ (y :: x :: l)\ (x :: y :: l)}\ (permutation\_swap)$$

$$\frac{permutation\ l\ l' \qquad permutation\ l'\ l''}{permutation\ l\ l''}\ (permutation\_trans)$$

Uma outra forma de definir a noção de permutação é baseada no número de ocorrências de cada elemento da lista (também disponível nas notas de aula):

Definição 65. *Seja x um número natural, e l uma lista de números naturais. Definimos recursivamente o número de ocorrências de x em l por:*

$$num\_oc\ x\ l = \begin{cases} 0, & se\ l = nil \\ 1 + num\_oc\ x\ tl, & se\ l = x :: tl \\ num\_oc\ x\ tl, & caso\ contrário. \end{cases}$$

O predicado $perm$, que define quando duas lista, digamos l e l' são permutações uma da outra.

Definição 66. *Sejam l e l' listas de números naturais. Definimos o predicado perm em função de num_oc por $perm\ l\ l' := \forall x, num\_oc\ x\ l = num\_oc\ x\ l'$.*

Prove que se (permutation l l') então (perm l l'), quaisquer que sejam as listas l e l'.

Solução: A prova é por indução na hipótese (permutation l l').

Temos 4 casos:

① Suponha que (permutation l l') foi gerado pela regra permutation_nil. Neste caso, $l = l' = nil$, e portanto

$\forall x$, num_oc x nil = num_oc x nil $\iff$

$\forall x$, num_oc x l = num_oc x l' $\iff$

perm l l'.

② Suponha que (permutation l l') foi gerado pela regra permutation_skip. Neste caso, temos que $l = x :: l_1$, $l' = x :: l_1'$ e (permutation l_1 l_1').

Por hipótese de indução, temos (perm l_1 l_1') e portanto (perm $(x::l_1)$ $(x::l_1')$), ou seja, (perm l l).

③ Suponha que (permutation l l') foi gerado pela regra permutation_swap. Neste caso, temos que $l = x::y::l_1$ e $l' = y::x::l_1$. Logo,

$$\forall z, \text{num\_oc } z \ (x::y::l_1) = \text{num\_oc } z \ (y::x::l_1) \iff$$

$$\forall z, \text{num\_oc } z \ l = \text{num\_oc } z \ l' \iff$$

perm l l'.

④ Por fim, suponha que (permutation l l') foi gerado pela regra permutation_trans. Neste caso, temos (permutation l l'') e (permutation l'' l') para alguma lista l''. Por hipótese de indução, temos (perm l l'') e (perm l'' l'), ou seja, temos

$\forall x, \text{num\_oc } x \ l = \text{num\_oc } x \ l''$ e

$\forall x, \text{num\_oc } x \ l'' = \text{num\_oc } x \ l'$. Portanto,

$$\forall x, \text{num\_oc } x \ l = \text{num\_oc } x \ l' \iff$$

perm l l'. $\blacksquare$