Projeto e Análise de Algoritmos

Flávio L. C. de Moura*

9 de março de 2022

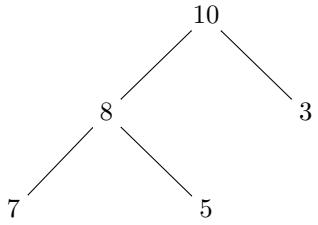
1 Heapsort

Estudaremos um novo algoritmo de ordenação baseado em comparação de chaves, mas bem diferente dos algoritmos (*insertion sort* e *mergesort*) vistos anteriormente. Este novo algoritmo, conhecido como *heapsort*, possui tempo de execução $O(n.\log n)$, como *mergesort*, e o processo de ordenação é feito *in place* (como em *insertion sort*). Portanto *heapsort* combina as vantagens de *insertion sort* e *mergesort*. A estrutura de dados utilizada por este algoritmo é conhecida como *heap*:

Definição 1.1. *Um* heap *(binário) T é uma estrutura de dados que corresponde a uma árvore binária com chaves associadas aos nós, sendo uma chave por nó, que satisfaz às seguintes condições:*

1. *T é uma árvore binária completa em todos os níveis, exceto possivelmente o último nível;*
2. *Todos os caminhos para uma folha do último nível estão à esquerda de todos os caminhos para uma folha do penúltimo nível;*
3. *A chave de cada nó é maior ou igual do que a chave dos seus filhos.*

Os itens 1 e 2 da definição acima caracterizam a chamada de **propriedade do corpo do *heap***. O item 3 corresponde a **propriedade de *heap***. Assim, em um *heap* o nó mais à direita pode ter apenas um filho à esquerda, mas não pode ter somente um filho à direita. Todos os outros nós internos possuem dois filhos.



A grande vantagem da estrutura de *heap* é que ela permite a implementação das operações de inserção de um novo elemento (ou uma nova chave), e extração do maior elemento (maior chave) em tempo logarítmico. Note que em um vetor (ou em uma lista) contendo n elementos, a inserção pode ser feita em tempo constante, mas a extração do maior elemento vai exigir, no pior caso, uma busca em todo o vetor (ou lista), o que tem custo linear. A estrutura de *heap* suporta simultaneamente as duas operações, e como veremos, de forma assintoticamente mais eficiente do que em listas ou vetores.

Um *heap* binário pode ser implementado como um subvetor de um vetor A, onde somente os elementos em $A[1..A.\text{heap-size}]$ ($0 \leq A.\text{heap-size} \leq A.length$) são elementos válidos do *heap*. A raiz do *heap* é $A[1]$, e dado o índice i de um nó, o índice do filho à esquerda (resp. direita) é dado por $2i$ (resp. $2i+1$). Por fim, o índice do nó correspondente ao pai do nó de índice i é dado por $\lfloor i/2 \rfloor$.

Alguns autores chamam a estrutura definida acima de *heap* de máximo (ou *max-heap*), isto é, um *heap* onde todo nó i diferente da raiz é tal que $A[\lfloor i/2 \rfloor] \geq A[i]$. Nesta linha, com um ajuste na propriedade de *heap* podemos definir um *heap* de mínimo (ou *min-heap*):

*flavio@flaviomoura.info

Em um *min-heap* todo nó i diferente da raiz é tal que $A[\lfloor i/2 \rfloor] \leq A[i]$.

Desta forma, o maior (resp. menor) elemento de um *max-heap* (resp. *min-heap*) é armazenado na raiz, e a subárvore com raiz em um determinado nó contém apenas valores que são menores ou iguais (resp. que são maiores ou iguais) ao valor deste nó. O algoritmo *heapsort* utiliza *max-heaps*, e portanto o primeiro passo do algoritmo será transformar o vetor A de entrada em um *max-heap*. Este trabalho é feito pelo algoritmo a seguir:

Algorithm 1: Build-Max-Heap(A)

```
1 A.heap-size = A.length;
2 for i = ⌊A.length/2⌋ downto 1 do
3 |   Max-Heapify(A,i);
4 end
```

Exercício 1.2. *Mostre que na representação vetorial de um* heap *com n elementos, as folhas são os elementos do vetor com índices $\lfloor n/2 \rfloor + 1, \lfloor n/2 \rfloor + 2, \ldots, n$.*

O algoritmo Build-Max-Heap constrói o *max-heap* de baixo para cima a partir do primeiro vértice que não é uma folha, e o algoritmo Max-Heapify(A,i) reconstrói um *max-heap* a partir de uma árvore cuja raiz $A[i]$ seja o único elemento que precise ser reposicionado, ou seja, as subárvores com raiz $A[2i]$ e $A[2i+1]$ já são *max-heaps*:

Algorithm 2: Max-Heapify(A,i)

```
1  l = 2i;
2  r = 2i + 1;
3  if l ≤ A.heap-size and A[l] > A[i] then
4  |   largest = l;
5  end
6  else
7  |   largest = i;
8  end
9  if r ≤ A.heap-size and A[r] > A[largest] then
10 |   largest = r;
11 end
12 if largest ≠ i then
13 |   exchange A[i] with A[largest];
14 |   Max-Heapify(A,largest);
15 end
```

Observe que cada uma das subárvores com raiz nas posições $2i$ e $2i+1$ têm, no máximo, $2n/3$ elementos:

Exercício 1.3. *Mostre que, em um* heap *com n elementos e raiz $A[i]$, cada uma das subárvores com raiz em $2i$ e $2i+1$ têm, no máximo, $2n/3$ elementos.*

Portanto o tempo de execução de Max-Heapify é dado pela recorrência

$$T(n) \leq T(2n/3) + \Theta(1) \tag{1}$$

que, pelo teorema mestre, tem solução $O(\lg n)$.

Qual o tempo de execução do procedimento Build-Max-Heap(A)? Temos a seguinte cota superior, considerando um *heap* com n elementos: $\sum_{i=1}^{n/2} O(\lg n) = O(\lg n . \sum_{i=1}^{n/2} 1) = O(\lg n.(n/2) = O(n . \lg n)$. No entanto, esta cota, apesar de correta, não é a mais precisa que podemos encontrar. De fato, se observarmos que:

1. A altura do n-ésimo elemento de um *heap* é igual a $\lfloor \lg n \rfloor$.
2. Um *heap* com n elementos possui, no máximo, $\lceil n/2^{h+1} \rceil$ nós com altura h.

Então, observando que Max-Heapify tem complexidade $O(h)$ quando executado em um nó de altura h, concluímos que o tempo de execução de Build-Max-Heap(A), assumindo que A possui n elementos, tem a seguinte cota superior: $\sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \lceil n/2^{h+1} \rceil \cdot O(h) = O(n. \sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \lceil h/2^{h+1} \rceil) = O(n)$, pois $\sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} h/2^{h+1} \leq \sum_{h=0}^{\infty} h/2^{h+1}$, que por sua vez converge. Assim, um *heap* pode ser construído em tempo linear.

Exercício 1.4. *Prove a seguinte invariante de laço, e conclua que o algoritmo Build-Max-Heap é correto:*

> *No início de cada iteração do laço* ***for*** *(linhas 2-4), cada nó nas posições $i+1$, $i+2$, ..., n é a raiz de um* max-heap.

O algoritmo *heapsort* recebe como argumento um vetor A qualquer contendo $n > 0$ elementos, e inicialmente o transforma em um *max-heap*. Neste momento, sabemos que a raiz do *heap* contém o maior elemento do vetor A, que pode então ser movido para sua posição correta. Em seguida, decrementamos o tamanho do *heap* em uma unidade, e repetimos o processo:

Algorithm 3: Heapsort(A)

```
1 Build-Max-Heap(A);
2 for i = A.length downto 2 do
3 |   exchange A[1] with A[i];
4 |   A.heap-size = A.heap-size - 1;
5 |   Max-Heapify(A,1);
6 end
```

A complexidade de Heapsort(A) no pior caso, se A é um vetor com $n > 0$ elementos, é $O(n) + \sum_{i=2}^{n} O(\lg n) = O(n) + O(\lg n. \sum_{i=2}^{n}) = O(n) + O((n-1). \lg n) = O(n. \lg n)$.

Exercício 1.5. *Mostre que a complexidade de tempo de Max-Heapify no pior caso é $\Omega(\lg n)$.*

Exercício 1.6. *Mostre que a complexidade de tempo de* Heapsort *no pior caso é $\Omega(n \lg n)$, e conclua que a complexidade de* Heapsort *é $\Theta(n. \lg n)$.*

Exercício 1.7. *Prove a correção do algoritmo* Heapsort *utilizando a seguinte invariante:*

> *No início de cada iteração do laço* ***for*** *(linhas 2-6), o subvetor $A[1..i]$ é um* max-heap *que contém os i menores elementos do vetor $A[1..n]$, e o subvetor $A[i+1..n]$ está ordenado e contém os $n-i$ maiores elementos do vetor $A[1..n]$.*