

Projeto e Análise de Algoritmos

Flávio L. C. de Moura*

17 de fevereiro de 2022

1 A correção do algoritmo *mergesort*

Algoritmos recursivos desempenham um papel fundamental em Computação. O algoritmo de ordenação *mergesort* é um exemplo de algoritmo recursivo, que se caracteriza por dividir o problema original em subproblemas que, por sua vez, são resolvidos recursivamente. As soluções dos subproblemas são então combinadas para gerar uma solução para o problema original. Este paradigma de projeto de algoritmo é conhecido com *divisão e conquista*. Este algoritmo foi inventado por J. von Neumann em 1945.

Algorithm 1: mergesort(A, p, r)

```
1 if  $p < r$  then
2    $q = \lfloor \frac{p+r}{2} \rfloor$ ;
3   mergesort( $A, p, q$ );
4   mergesort( $A, q + 1, r$ );
5   merge( $A, p, q, r$ );
6 end
```

A etapa de combinar dois vetores ordenados (algoritmo *merge*) é a etapa principal do algoritmo *mergesort*. O procedimento *merge*(A, p, q, r) descrito a seguir recebe como argumentos o vetor A , e os índices p, q e r tais que $p \leq q < r$. O procedimento assume que os subvetores $A[p..q]$ e $A[q + 1..r]$ estão

*flavio@flaviomoura.info

ordenados.

Algorithm 2: merge(A, p, q, r)

```
1  $n_1 = q - p + 1$  ; // Qtd. de elementos em  $A[p..q]$ 
2  $n_2 = r - q$  ; // Qtd. de elementos em  $A[q + 1..r]$ 
3 let  $L[1..n_1 + 1]$  and  $R[1..n_2 + 1]$  be new arrays;
4 for  $i = 1$  to  $n_1$  do
5 |  $L[i] = A[p + i - 1]$ ;
6 end
7 for  $j = 1$  to  $n_2$  do
8 |  $R[j] = A[q + j]$ ;
9 end
10  $L[n_1 + 1] = \infty$ ;
11  $R[n_2 + 1] = \infty$ ;
12  $i = 1$ ;
13  $j = 1$ ;
14 for  $k = p$  to  $r$  do
15 | if  $L[i] \leq R[j]$  then
16 | |  $A[k] = L[i]$ ;
17 | |  $i = i + 1$ ;
18 | end
19 | else
20 | |  $A[k] = R[j]$ ;
21 | |  $j = j + 1$ ;
22 | end
23 end
```

Exercício 1.1. Prove a seguinte invariante de laço e conclua que o algoritmo merge é correto:

Antes de cada iteração do **for** (linhas 14-23), o subvetor $A[p..k - 1]$ está ordenado, e contém os $k - p$ menores elementos dos vetores $L[1..n_1 + 1]$ e $R[1..n_2 + 1]$.

Prove o teorema a seguir (correção do algoritmo *mergesort*) por indução no número n de elementos do vetor A :

Teorema 1.2. Seja A um vetor qualquer contendo n elementos. Então o algoritmo *mergesort*($A, 1, n$) retorna o vetor ordenado A' que é uma permutação de A .