Projeto e Análise de Algoritmos

Flávio L. C. de Moura*

22 de fevereiro de 2022

1 O Teorema Mestre

Definição 1.1. *Seja $f(n)$ uma função não-negativa definida no conjunto dos números naturais. Dizemos que $f(n)$ é* **eventualmente não-decrescente** *se existir um número inteiro n_0 tal que $f(n)$ é não-decrescente no intervalo $[n_0, \infty)$, ou seja,*

$$f(n_1) \leq f(n_2), \forall n_2 > n_1 \geq n_0.$$

Definição 1.2. *Seja $f(n)$ uma função não-negativa definida no conjunto dos números naturais. Dizemos que $f(n)$ é* **suave** *se for eventualmente não-decrescente e*

$$f(2.n) = \Theta(f(n))$$

Lema 1.3. *Seja $f(n)$ uma função suave. Se $f(2.n) \leq c_2.f(n), \forall n \geq n_0$ então $f(2^k.n) \leq c_2^k.f(n), \forall k \geq 1, n \geq n_0$.*

Lema 1.4. *Seja $f(n)$ uma função suave. Se existem constantes positivas c_2 e n_0 tais que $c_2.f(n) \leq f(2.n), \forall n \geq n_0$ então $c_2^k.f(n) \leq f(2^k.n), \forall k \geq 1, n \geq n_0$.*

Teorema 1.5. *Seja $f(n)$ uma função suave. Então para qualquer $b \geq 2$ fixado,*

$$f(b.n) = \Theta(f(n))$$

Teorema 1.6 (Regra da suavização)**.** *Seja $T(n))$ uma função eventualmente não-decrescente, e $f(n)$ uma função suave. Se $T(n) = \Theta(f(n))$ para valores de n que são potências de b ($b \geq 2$), então*

$$T(n) = \Theta(f(n)), \forall n.$$

A regra da suavização nos permite expandir a informação sobre a ordem de crescimento estabelecida para $T(n)$ de um subconjunto de valores (potências de b) para o domínio inteiro. O teorema a seguir é um resultado muito útil nesta direção:

Teorema 1.7 (Teorema Mestre - versão 1)**.** *Seja $T(n)$ uma função eventualmente não-decrescente que satisfaz a recorrência*

$$\begin{array}{l} T(n) = a.T(n/b) + f(n), \quad \textit{para } n = b^k \ (k \geq 1) \\ T(1) = c \end{array}$$

onde $a \geq 1, b \geq 2$ e $c > 0$. Se $f(n) = \Theta(n^d)$, onde $d \geq 0$, então

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^d), & \textit{se } a < b^d \\ \Theta(n^d. \lg n), & \textit{se } a = b^d \\ \Theta(n^{\log_b a}), & \textit{se } a > b^d \end{cases}$$

*flavio@flaviomoura.info

Demonstração. Considere que $f(n) = n^d$. Aplicando o método da substituição para a recorrência do teorema, obtemos:

$$T(b^k) = a^k.[T(1) + \sum_{j=1}^{k} f(b^j)/a^j]$$

Como $a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$, podemos reescrever a equação acima como:

$$T(n) = n^{\log_b a}.[T(1) + \sum_{j=1}^{\log_b n} f(b^j)/a^j]$$

e para $f(n) = n^d$, temos:

$$T(n) = n^{\log_b a}.[T(1) + \sum_{j=1}^{\log_b n} (b^j)^d/a^j] = n^{\log_b a}.[T(1) + \sum_{j=1}^{\log_b n} (b^d/a)^j]$$

A soma acima forma uma série geométrica, e portanto:

$$\sum_{j=1}^{\log_b n} (b^d/a)^j = (b^d/a)\frac{(b^d/a)^{\log_b n} - 1}{(b^d/a) - 1}, \text{ se } b^d \neq a.$$

Quando $b^d \neq a$, temos que $\sum_{j=1}^{\log_b n} (b^d/a)^j = \log_b n$. Agora basta analisarmos cada um dos casos: $a < b^d$, $a > b^d$ e $a = b^d$. □

Apresentaremos agora uma versão um pouco mais geral do teorema mestre. Consideraremos como anteriormente uma recorrência da forma:

$$T(n) = a.T(n/b) + f(n)$$

on $a \geq 1$ e $b > 1$ são constantes, e $f(n)$ é uma função assintoticamente positiva.

Teorema 1.8 (Teorema Mestre - versão 2)**.** *Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, $f(n)$ uma função assintoticamente positiva, e $T(n)$ definida nos inteiros não-negativos pela recorrência:*

$$T(n) = a.T(n/b) + f(n)$$

onde n/b deve ser interpretado como $\lfloor n/b \rfloor$ ou $\lceil n/b \rceil$. Então $T(n)$ tem as seguintes cotas assintóticas:

1. *Se $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.*
2. *Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}. \lg n)$.*
3. *Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, e se $a.f(n/b) \leq c.f(n)$ para alguma constante $c < 1$, então para todo n suficientemente grande, temos que $T(n) = \Theta(f(n))$.*

A prova será dividida em três lemas, onde inicialmente consideraremos que n é potência de b.

Lema 1.9. *Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, $f(n)$ uma função não-negativa definida para potências de b. Defina $T(n)$ para potências de b pela recorrência:*

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & se\ n = 1; \\ a.T(n/b) + f(n), & se\ n = b^i \end{cases}$$

onde i é um inteiro positivo. Então

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j.f(n/b^j).$$

Demonstração. Analise a árvore de recorrência da equação dada. □

Em termos da árvore de recorrência, os três casos do teorema mestre correspondem aos casos onde o custo total da árvore é:

1. dominado pelo custo das folhas;

2. uniformemente distribuído ao longo da árvore;

3. dominado pelo custo da raiz.

Lema 1.10. *Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, $f(n)$ uma função não-negativa definida para potências de b. A função $g(n)$ definida para potências de b por:*

$$g(n) = \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j . f(n/b^j).$$

tem as seguintes cotas assintóticas para potências de b:

1. *Se $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, então $g(n) = O(n^{\log_b a})$.*

2. *Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $g(n) = \Theta(n^{\log_b a} . \lg n)$.*

3. *Se $a.f(n/b) \leq c.f(n)$ para alguma constante $c < 1$ e para todo n suficientemente grande, então $g(n) = \Theta(f(n))$.*

Demonstração. Exercício. □