if $p < r$ **then**
  $q = \lfloor \frac{p+r}{2} \rfloor$;
  mergesort(A, p, q);
  mergesort$(A, q+1, r)$;
  merge(A, p, q, r); $\leftarrow$ $T_{merge}(n) = \Theta(n)$.
end

Algorithm 6: mergesort(A, p, r)

$$\begin{cases} T(n) = 2.T(n/2) + c.n \\ T(0) = T(1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow T(n) = \underbrace{c.(\lg n).n}_{} \quad c.n.\lg n = \Theta(n.\lg n).$$

Assuma que $n = 2^K \ (K > 0)$; $(K = \lg n)$

$$\Rightarrow \begin{cases} T(2^K) = 2.T(2^{K-1}) + c.2^K \\ T(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T(2^K) &= 2.\underline{T(2^{K-1})} + c.2^K \\ &= 2.(2.T(2^{K-2}) + c.2^{K-1}) + c.2^K \\ &= 2^2.\underline{T(2^{K-2})} + c.2^K + c.2^K \\ &= 2^2.(2.T(2^{K-3}) + c.2^{K-2}) + 2.c.2^K \\ &= 2^3.T(2^{K-3}) + c.2^K + 2.c.2^K \\ &= 2^3.T(2^{K-3}) + 3.c.2^K = \dots \\ &= 2^K.T(2^{K-K}) + K.c.2^K = c.K.2^K. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{T(2^K) = c.K.2^K} \quad (*)$$

Prova de $(*)$: Indução em K:

- $K = 0$: Trivial.

$\cdot\ K>0: \quad T(2^K) = 2.\underline{T(2^{K-1})} + c.2^K$

Temos por hipótese de indução

$\boxed{T(2^{K-1}) = c.(K-1).2^{K-1}}$

$\overset{h.i.}{=} 2.(\underline{c.(K-1).2^{K-1}}) + c.2^K$

$= 2.c.K.2^{K-1} - \cancel{2.c.2^{K-1}} + \cancel{c.2^K}$

$= c.K.2^K.$ $\boxed{}$

Definição 164. *Seja $f(n)$ uma função não-negativa definida no conjunto dos números naturais. Dizemos que $f(n)$ é* suave *se for eventualmente não-decrescente e*

$$f(2.n) = \Theta(f(n))$$

Exemplos:

① $f(n) = c$: $\quad f(2n) = f(n) = \Theta(f(n)) = \underline{\underline{\Theta(1)}}$.

② $f(n) = \lg n$:

2.1 $f(2.n) = O(f(n))$

$\exists c, n_0 : f(2.n) \leq c.f(n), \forall n \geq n_0.$

$\lg(2.n) \leq c.\lg n, \ \forall n \geq n_0$

De fato, $\lg(2.n) = \lg 2 + \lg n$

$= 1 + \lg n \leq 2.\lg n, \ \forall n > 2.$

2.2 $f(2.n) = \Omega(f(n))$.

Exercício.

$\exists c', n_0' :$

$f(2.n) \geq c'.f(n),$

$\forall n \geq n_0'.$

③ $f(n) = n$: exercício

④ $f(n) = n.\lg n$: exercício.

⑤ $f(n) = 2^n$ não é suave : exercício.

Teorema 167. *Seja $T(n)$ uma função eventualmente não-decrescente que satisfaz a recorrência*

$T(n) = a.T(n/b) + f(n)$, *para* $n = b^k, k = 1, 2, 3, \ldots$

$T(1) = c$

onde $a \geq 1, b \geq 2$ *e* $c > 0$. *Se* $f(n) = \Theta(n^d)$, *onde* $d \geq 0$, *então*

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^d), & se\ a < b^d \\ \Theta(n^d . \lg n), & se\ a = b^d \\ \Theta(n^{\log_b a}), & se\ a > b^d \end{cases}$$

Mergesort : $T(n) = 2.T(n/2) + \Theta(n)$

$a = 2$

$b = 2$ $\qquad a = 2 = 2^1 = b^d$

$d = 1$

$$\boxed{T(n) = \Theta(n . \lg n)}$$