(b) $T(1) = 1$, $T(n) = 2T(n/2) + n$, $n \geq 2$

$a = b = 2 \qquad n^{\log_b^a} = n$

$f(n) = n = \Theta(n) \implies$ CASO 2: $\boxed{T(n) = \Theta(n.\lg n)}$

(c) $T(1) \in \Theta(1)$, $T(n) = 3T(n/3 + 5) + n/2$

O deslocamento constante é irrelevante para a análise assintótica, e portanto podemos resolver a recorrência $T'(n) = 3.T'(n/3) + n/2$.

V1 $\begin{cases} a = b = 3, \ d = 1 \qquad a = 3 = 3^1 = b^d \\ \implies \text{caso } 2: \ T(n) = \Theta(n.\lg n) \end{cases}$

V2 $\left\{ f(n) = \frac{n}{2} = \Theta(n) \implies \text{CASO } 2: \ T(n) = \Theta(n.\lg n) \right.$

(l) $T(1) \in \Theta(1)$, $T(n) = 3T(n/2) + nln(n)$

$f(n) = n.\ln(n) \neq \Theta(n^d)$ $d \geq 0$. e portanto a V1 não se aplica. Mas podemos usar a V2: $\quad n^{\log_b^a} = n^{\log_2^3}$

$f(n) = n.\ln(n) = O(n^{\log_2^3 - \varepsilon})$

$\implies$ CASO 1: $T(n) = \Theta(n^{\log_2^3})$.

(n) $T(1) \in \Theta(1)$, $T(n) = 2T(n/2) + nln(n)$

$a = b = 2 \qquad n^{\log_b^a} = n$

$f(n) = n.\ln(n) = \Omega(n^{\varepsilon}) \implies$ caso 3: adicionalmente precisamos mostrar a condição de estabilidade: $a.f(n/b) \leq c.f(n)$ para $c < 1$ e n suficientemente grande.

$$2 \cdot \frac{n}{2} \ln\left(\frac{n}{2}\right) = n\,(\ln(n) - \ln 2)$$

$$= n \cdot \ln(n) - n \cdot \ln 2$$

Para a condição ser satisfeita precisamos encontrar uma constante $c < 1$ tal que

$$n \cdot \ln(n) - n \cdot \ln 2 \leq c \cdot n \cdot \ln(n), \text{ para } n \text{ suf. grande.}$$

$$\Longleftrightarrow (1-c)\,\cancel{n} \cdot \ln(n) \leq (\ln 2) \cdot \cancel{n}$$

$$\Longleftrightarrow \ln(n) \leq \frac{\ln 2}{1-c}, \ \forall n \text{ suf. grande } \lightning$$

Logo, o teorema mestre não se aplica.