Exercício: Mostre que se $f(n) = O(g(n))$ e $g(n) = O(h(n))$ então $f(n) = O(h(n))$.

Solução: Temos que $f(n) = O(g(n))$, ou seja, existem constantes positivos c_1 e n_1 tais que $f(n) \leq c_1 \cdot g(n)$, $\forall n \geq n_1$ (*). Também temos que $g(n) = O(h(n))$ e portanto existem constantes positivos c_2 e n_2 tais que

$$g(n) \leq c_2 \cdot h(n), \quad \forall n \geq n_2. \quad (**)$$

Queremos provar que $f(n) = O(h(n))$, e portanto precisamos mostrar que existem constantes positivos c e n_0 tais que $f(n) \leq c \cdot h(n)$, $\forall n \geq n_0$. Multiplicando (**) por c_1, temos

$$c_1 \cdot g(n) \leq c_1 \cdot c_2 \cdot h(n), \quad \forall n \geq n_2.$$

Usando (*) temos $f(n) \leq c_1 \cdot g(n) \leq$

$$\underbrace{c_1 \cdot c_2}_{c} \cdot h(n), \quad \forall n \geq \underbrace{\max(n_1, n_2)}_{n_0}.$$

Tomando $c = c_1 \cdot c_2$ e $n_0 = \max(n_1, n_2)$ temos $f(n) = O(h(n))$. ☒