Teorema 10. *Seja $f(n)$ uma função suave. Então para qualquer $b \geq 2$ fixado,*

$$f(b.n) = \Theta(f(n))$$

Prova: Mostraremos $f(b.n) = O(f(n))$.

Temos que $f(n)$ é suave, ou seja, $f(2n) = \Theta(f(n))$. Em particular, $f(2n) = O(f(n))$, i.e. existem constantes positivas c e n_0 tais que $f(2n) \leq c.f(n), \forall n \geq n_0$.

Sabemos que existe $K > 0$ tal que $2^K \leq b < 2^{K+1}$ $(b \geq 2)$. Como f é eventualmente não decrescente

$$f(bn) \leq f(2^{K+1}.n) \quad , \forall n \geq n_0$$

Como $f(2n) \leq c.f(n), \forall n \geq n_0$ então pelo teorema anterior $f(2^{K+1}.n) \leq c^{K+1}.f(n), \forall n \geq n_0$.

Logo, $f(b.n) \leq c^{K+1}.f(n), \forall n \geq n_0$.

$$f(b.n) = O(f(n)). \quad \boxed{}$$

Agora mostraremos que $f(b.n) = \Omega(f(n))$. Pela suavidade de f temos que $f(2.n) = \Omega(f(n))$. Ou seja, existem constantes positivas c e n_0 tais que

$f(2n) \geq c.f(n)$, $\forall n \geq n_0$. Seja $K>0$ um inteiro tal que $2^K < b \leq 2^{K+1}$ $(b \geq 2)$, e como f é eventualmente não decrescente, temos que existe n' tal que $f(bn) \geq f(2^K.n)$, $\forall n \geq n'$. Como no caso anterior, mostraremos por indução, o seguinte resultado:

Sejam $f(n)$ uma função suave, e c e n_0 constantes positivas. Se $f(2.n) \geq c.f(n)$, $\forall n \geq n_0$ então $f(2^K.n) \geq c^K.f(n)$, $\forall n \geq n_0$ e $K \geq 1$.

PROVA: Indução em K. Se $K=1$ então o resultado é trivial. Suponha que $f(2^K.n) \geq c^K.f(n)$, $\forall n \geq n_0$ para $K>1$. Mostraremos que $f(2^{K+1}.n) \geq c^{K+1}.f(n)$, $\forall n \geq n_0$. De fato, $f(2^{K+1}.n) = f(2.2^K.n) \overset{hip.}{\geq} c.f(2^K.n) \overset{(h.i.)}{\geq}$

$c.c^K.f(n) = c^{K+1}.f(n)$, $\forall n \geq n_0$. $\boxtimes$

Agora podemos usar este resultado auxiliar, e tomando $n_1 = \max(n', n_0)$, temos que

$f(b.n) \geq f(2^K.n) \geq c^K.f(n)$, $\forall n \geq n_1$. Ou seja

$f(b.n) = \Omega(f(n))$. $\boxtimes$