$T(n) = 3.T(n/2) + n.\lg n$

A versão 1 do TM não se aplica pois $n.\lg n \neq \Theta(n^{\epsilon})$.

$\ulcorner$

$n.\lg n \leq c.\, n^2, \forall n \geq n_0$

$n.\lg n \geq c'.\, n^2, \forall n \geq n_0' \implies \lg n \geq c'.n, \forall n \geq n_0'$ ↯ $\lrcorner$

Vejamos a versão 2: Temos que $n.\lg n \leq n^{\log_2^3 - \varepsilon}$, e portanto caímos no caso 3. Logo, $T(n) = \Theta(n^{\log_2^3})$

Alternativamente, podemos usar o método da substituição:

Considere $n = 2^k \iff k = \lg n$:

$$T(2^k) = 3.\underline{T(2^{k-1})} + k.2^k$$
$$= 3.(3.T(2^{k-2}) + (k-1).2^{k-1}) + k.2^k$$
$$= 3^2.\underline{T(2^{k-2})} + 3.(k-1).2^{k-1} + k.2^k$$
$$= 3^2.(3.T(2^{k-3}) + (k-2).2^{k-2}) + 3(k-1).2^{k-1} + k.2^k$$
$$= 3^3.T(2^{k-3}) + 3^2.(k-2).2^{k-2} + 3(k-1).2^{k-1} + k.2^k = \cdots$$
$$= 3^k.T(1) + 3^{k-1}.2 + 3^{k-2}.2.2^2 + 3^{k-3}.3.2^3 + \cdots + 3.(k-1).2^{k-1} + 3^0.k.2^k$$
$$= 3^k.[T(1) + 2/3 + 2(2/3)^2 + 3(2/3)^3 + \cdots + (k-1).(2/3)^{k-1} + k(2/3)^k]$$
$$= 3^k[T(1) + \sum_{i=1}^{k} i.(2/3)^i]$$
$$= 3^k[T(1) + \sum_{i=1}^{k} \frac{i.2^i}{3^i}].$$ Sabemos que

$$\sum_{i=0}^{n} i.x^i = \frac{x-(n+1)x^{n+1} + n.x^{n+2}}{(x-1)^2}$$ se $x \neq 1$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{k} i\left(\frac{2}{3}\right)^i = \frac{\frac{2}{3} - (k+1).(\frac{2}{3})^{k+1} + k.(\frac{2}{3})^{k+2}}{1/9}$$
$$= 9\left(\frac{2}{3} - (k+1).\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} + k\left(\frac{2}{3}\right)^{k+2}\right)$$
$$= 6 - 9(k+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} + 9k\left(\frac{2}{3}\right)^{k+2}.$$

Portanto $T(2^k) = 3^k.\left[T(1) + 6 - 9(k+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} + 9k\left(\frac{2}{3}\right)^{k+2}\right]$

$= 3^k(T(1)+6) - 3(k+1).2^{k+1} + k.2^{k+2}$ e esta soma é dominada pela primeira parcela, ou seja, $T(2^k) = \Theta(3^k)$. Reescrevendo esta solução em função de n, temos $3^k = 3^{\lg n} = n^{\lg 3}$ e portanto $T(n) = \Theta(n^{\lg 3})$ como queríamos. ∎