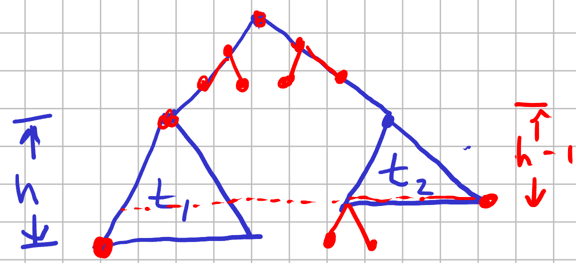
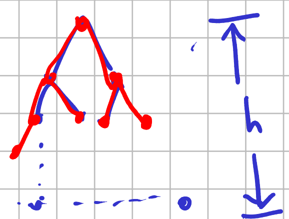
Exercício 3. *Mostre que, em um* heap *com n elementos e raiz $A[i]$, cada uma das subárvores com raiz em $2i$ e $2i+1$ têm, no máximo, $2n/3$ elementos.*

As subárvores com raiz em $2i$ e $2i+1$ terão um número máximo de elementos quando forem árvores binárias completas. Dada a forma como um heap é construído, suponha que a subárvore com raiz em $2i$ seja completa e tenha altura h:



A subárvore t_1 tem $2^{h+1}-1$ elementos e t_2 tem, no máximo, $2^{h+1}-1$.

$2^0 = 1$
$2^1 = 2$
2^2
$\vdots$
2^h



nº de nós de uma árvore binária completa : $\displaystyle\sum_{i=0}^{h} 2^i = 2^{h+1}-1$

Como $A[i]$ possui n vértices, temos

$$n = 1 + \underbrace{(2^{h+1}-1)}_{|t_1|} + |t_2| \geqslant \cancel{1} + \underbrace{(2^{h+1}\cancel{-1})} + 2^h - 1$$

$$\Rightarrow 2^{h+1} + 2^h \leq n+1 \Rightarrow 2 \cdot 2^h + 2^h \leq n+1 \Rightarrow$$

$$3 \cdot 2^h \leq n+1 \Rightarrow 2^h \leq \frac{n+1}{3} \Rightarrow$$

$$2^{h+1} \leq 2\left(\frac{n+1}{3}\right) \Rightarrow \underbrace{2^{h+1}-1}_{|t_1|} \leq \frac{2(n+1)}{3} - 1$$

$$= \frac{2n}{3} + \frac{2}{3} - 1 = \frac{2n}{3} - \frac{1}{3} \leq \frac{2n}{3}. \quad \boxtimes$$