Atividade 5: Se $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c < \infty$, incluindo o caso em que $c = 0$, então

$$f(n) = O(g(n)).$$

Solução: Pela definição de limite, temos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\left| \frac{f(n)}{g(n)} - c \right| < \varepsilon$, para $n > \delta$. Portanto,

$$\underbrace{-\varepsilon < \frac{f(n)}{g(n)} - c < \varepsilon}, \text{ para } n > \delta \quad \rightarrow$$

$$f(n) < (c+\varepsilon).g(n), \text{ para } n > \delta$$

Logo, existem constantes positivas c' e n' tais que

$$f(n) \leq c'.g(n), \ \forall n \geq n'.$$

De fato, tome $c' = c + \varepsilon$ e $n' = \delta$. Assim, concluímos que $f(n) = O(g(n))$.