

Mostre que 2-SAT  $\in$  P.

**Solução:** Seja  $\varphi$  uma instância de 2-SAT. Qualquer cláusula de  $\varphi$ , digamos  $l_1 \vee l_2$ , pode ser representada pelo par de implicações:  $\bar{l}_1 \rightarrow l_2$  e  $\bar{l}_2 \rightarrow l_1$ . Assim, podemos construir um digrafo  $G = (V, E)$  com  $|V| = 2n$  da seguinte forma:

1. Se  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  é o conjunto de todas as variáveis que ocorrem em  $\varphi$ , então  $G$  terá o seguinte conjunto de vértices:

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$$

2. Para cada cláusula  $l_1 \vee l_2$  de  $\varphi$  adicionaremos as arestas  $\bar{l}_1 l_2$  e  $\bar{l}_2 l_1$ .

Esta construção é tal que " $\varphi$  é satisfatível se, e somente se, nenhuma componente fortemente conexa de  $G$  possui simultaneamente uma variável  $x$  e sua negação  $\bar{x}$ ."

Desta forma podemos utilizar um algoritmo como BFS para verificar se existe um caminho do vértice  $x$  para a sua negação  $\bar{x}$ , ou o contrário, de  $\bar{x}$  para  $x$ , para algum  $x \in V$ . Em caso afirmativo,  $\varphi$  é insatisfatível, e caso contrário,  $\varphi$  é satisfatível. Claramente, tanto a construção do grafo quanto a busca podem ser feitos em tempo polinomial.