Teorema 9. *Seja $f(n)$ uma função não-negativa definida no conjunto dos números naturais. Se $f(2n) \leq c.f(n), \forall n \geq n_0$ então $f(2^k n) \leq c^k.f(n), \forall n \geq n_0$ e $k \geq 1$.*

Prova: Indução em $k \geq 1$:

- $k=1$: trivial
- $k>1$: $f(2^k.n) = f(2.2^{k-1}.n) \leq c.f(2^{k-1}.n) \overset{h.i.}{\leq} c.c^{k-1}.f(n) = c^k.f(n)$, $\forall n \geq n_0$. $\boxtimes$

Teorema 10. *Seja $f(n)$ uma função suave. Então para qualquer $b \geq 2$ fixado,*

$$f(b.n) = \Theta(f(n))$$

Prova: Mostraremos $f(b.n) = O(f(n))$.

Temos que $f(n)$ é suave, ou seja, $f(2n) = \Theta(f(n))$. Em particular, $f(2n) = O(f(n))$, i.e. existem constantes positivas c e n_0 tais que $f(2n) \leq c.f(n)$, $\forall n \geq n_0$.

Sabemos que existe $k>0$ tal que $2^k \leq b < 2^{k+1}$ $(b \geq 2)$. Como f é eventualmente não decrescente

$f(bn) \leq f(2^{k+1}.n)$, $\forall n \geq n_0$

Como $f(2n) \leq c.f(n)$, $\forall n \geq n_0$ então pelo teorema anterior $f(2^{k+1}.n) \leq$

$c^{k+1} \cdot f(n)$, $\forall n \geq n_0$.

Logo, $f(b \cdot n) \leq \underline{\underline{c^{k+1}}} \cdot f(n)$, $\forall n \geq \underline{\underline{n_0}}$.

$$f(b \cdot n) = O(f(n)). \qquad \blacksquare$$

Teorema 11. *Seja $T(n)$ uma função eventualmente não-decrescente, e $f(n)$ uma função suave. Se $T(n) = \Theta(f(n))$ para valores de n que são potências de b ($b \geq 2$), então*

$$T(n) = \Theta(f(n)), \forall n.$$

<u>Prova</u>: Mostraremos que $T(n) = O(f(n))$, $\forall n$.

Temos por hipótese que $T(b^k) = O(f(b^k))$, ou seja, existem constantes positivas c e n_0 tais que $T(b^k) \leq c \cdot f(b^k)$, $\forall n \geq n_0$ e $k > 0$.

Estamos assumindo que $n = b^k$ ($k > 0$).

Sabemos que existe $r > 0$ tal que $\underline{b^r \leq n < b^{r+1}}$. Como $T(n)$ é eventualmente não-decrescente, existe $n_0 > 0$ tal que $T(n) \leq T(b^{r+1}) \leq c \cdot f(b^{r+1}) =$

$c \cdot f(b \cdot b^r) \leq c \cdot c_b \cdot f(b^r) \leq$

$c \cdot c_b \cdot f(n)$, $\forall n \geq n_0$.

Logo, $T(n) = O(f(n))$. $\blacksquare$

$$T(b^K) = a.\underline{T(b^{K-1})} + f(b^K)$$

$$= a\left(a.T(b^{K-2}) + f(b^{K-1})\right) + f(b^K)$$

$$= a^2.\underline{T(b^{K-2})} + a.f(b^{K-1}) + f(b^K)$$

$$= a^2.\left(a.T(b^{K-3}) + f(b^{K-2})\right) + a.f(b^{K-1}) + f(b^K)$$

$$= a^3.T(b^{K-3}) + a^2.f(b^{K-2}) + a.f(b^{K-1}) + f(b^K)$$

$$= \dots$$

$$= a^K.T(b^{K-K}) + a^{K-1}.f(b) + a^{K-2}.f(b^2) + \dots + a^2.f(b^{K-2}) + a.f(b^{K-1}) + f(b^K)$$

$$= a^K\left[T(1) + f(b)/a + f(b^2)/a^2 + \dots + f(b^K)/a^K\right]$$

$$= a^K\left[T(1) + \sum_{i=1}^{K} f(b^i)/a^i\right]$$

$$=$$